Rozwiązania równań Einsteina w czasoprzestrzeniach o wymiarze większym niż 4

Małgorzata Jakimowicz-Bazyluk

Praca doktorska wykonana pod kierunkiem prof. dr. hab. Jacka Tafla

Katedra Teorii Względności i Grawitacji
Instytut Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 2015

Spis treści

Wstęp

Zgodność teorii fizycznych z doświadczeniem przekonuje nas, że świat w którym żyjemy jest 4-wymiarowy tzn. każdemu zdarzeniu możemy przypisać 3 współrzędne przestrzenne i 1 czasową. Na początku XX w. teoria względności zrewolucjonizowała poglądy na otaczającą nas rzeczywistość odrzucając pojęcie czasu absolutnego, a osobne dotąd pojęcia przestrzeni i czasu połączone zostały w jedno - czasoprzestrzeń. Z teoretycznego punktu widzenia zwykle nie ma problemu z uogólnieniem modeli fizycznych do czasoprzestrzeni o wymiarze wyższym niż 4. Tego typu uogólnienia okazały się użyteczne przy konstrukcji teorii fizycznych w 4-wymiarowej czasoprzestrzeni, ale nie brakuje też prób potraktowania dodatkowych wymiarów jako realnie istniejących, chociaż niedostrzegalnych.

W latach 20. ubiegłego wieku sformułowana została teoria Kaluzy-Kleina unifikująca w pięciowymiarowej czasoprzestrzeni grawitację i elektromagnetyzm. Gwałtowny rozwój teorii wielowymiarowych nastąpił w latach 70., kiedy to powstała teoria strun oraz teoria supergrawitacji. Były one próbą rozwiązania takich problemów fizyki teoretycznej jak unifikacja podstawowych oddziaływań oraz problem hierarchii, czyli rozbieżność między skalą Plancka a skalą oddziaływań słabych.

Teoria strun jest wciąż, mimo nikłych na razie perspektyw na jej doświadczalne potwierdzenie, rozważana przez wielu jako bardziej podstawowa teoria, unifikująca grawitację z pozostałymi oddziaływaniami fundamentalnymi. Immanentną cechą teorii strun jest istnienie dodatkowych wymiarów. Co więcej, teoria ta wymaga dla spójności konkretnej ich liczby (teoria strun bozonowych wymaga istnienia 26 wymiarów, a teoria superstrun 10). Rozbieżność między liczbą wymiarów przewidywaną przez teorię a obserwowaną próbuje się wyjaśnić postulując kompaktyfikację dodatkowych wymiarów. Przy rozmiarze będącym rzędu długości Plancka dodatkowe wymiary byłyby niedostrzegalne przy dostępnych skalach energii. Inny scenariusz wyłania się z M-teorii, która jest 11 wymiarowym rozszerzeniem teorii superstrun, uogólniającym jej pięć rodzajów. W jej ramach możliwa jest taka interpretacja, że pola materii uwięzione są na czterowymiarowej podprzestrzeni (nazywanej w tym kontekście braną), podczas gdy grawitacja mogłaby się propagować w dodatkowych, niekoniecznie skompaktyfikowanych wymiarach. Na bazie tej koncepcji zaczęły pod koniec XXw. powstawać proste modele branowe takie jak model Randall-Sundrum oraz model DGP (Dvali-Gabadadze-Porrati). Modele te są próbą przybliżenia zaawansowanej teorii, fenomenologicznego opisu i zrozumienia zjawisk, które mogą się kryć za dodatkowymi wymiarami. Niezależnie od teorii strun czy M-teorii stało się powszechnie akceptowanym, że rozwiązanie problemów fizyki teoretycznej może tkwić w teorii z dodatkowymi wymiarami. W ostatnich latach niezwykle popularna stała się tzw. korespondencja AdS/CFT, która opisuje związki pomiędzy klasyczną teorią grawitacji w 5-wymiarowej czasoprzestrzeni i kwantową teorią na jej brzegu. Jako konsekwencja tych tendencji pojawiła się potrzeba analizy wielowymiarowych równań Einsteina, aby uzyskać nowe rozwiązania oraz narzędzia do rozwijania i studiowania modeli. W tym kontekście powstała niniejsza praca.

Rozdział 1 zawiera krótkie wprowadzenie do zagadnień wielowymiarowych równań Einsteina. Opisane są znane ścisłe rozwiązania równań, ze szczególnym uwzględnieniem metryk sferycznie symetrycznych, w tym metryki Grossa-Perry'ego, będącej punktem wyjścia do rozważań w rozdziale 3. Omówione są również zagadnienia istotne z punktu widzenia pracy, takie jak klasyfikacja algebraiczna metryk wielowymiarowych.

W rozdziale 2 zaprezentowana jest nowa metoda rozwiązywania równań Einsteina w czasoprzestrzeni o wymiarze $N+n+1$ przy założeniu symetrii $SO(n+1)$. Najpierw (N+n+1)- wymiarowe równania Einsteina ze stałą kosmologiczną zredukowane zostają do równań (N+1)-wymiarowych z polem skalarnym o odpowiednim potencjale. Następnie, po wprowadzeniu dodatkowych założeń odnośnie pola skalarnego oraz tensora Einsteina w podprzestrzeni N-wymiarowej, dokonana jest dalsza redukcja równań prowadząca ostatecznie do przejrzystej procedury pozwalającej na otrzymanie rozwiązań. Kolejne kroki procedury przedstawione są w podsumowaniu do rozdziału 2.

Rozdział 3 poświęcony jest rozwiązywaniu warunków określonych w rozdziale 2 W podrozdziale 3.2 otrzymane są w ten sposób metryki z klasy Kasnera oraz z uogólnionej do wielu wymiarów klasy Kundta. Podrozdział 3.3 zawiera wyprowadzenie oraz opis rodziny rozwiązań, która jest uogólnieniem rozwiązania Grossa-Perry'ego do większej liczby wymiarów. W ramach tej rodziny rozwiązań wyróżnione są trzy klasy różniące się nieco własnościami. Dla każdej z nich zbadane zostały własności takie jak rodzaj symetrii, osobliwości, asymptotyka oraz typ algebraiczny określony według procedury Coley'a, Milsona, Pravdy i Pravdova. Ich cechą wspólną jest m.in. zachowanie w nieskończoności oraz istnienie osobliwości. Jedna z klas zawiera w ogólności metryki algebraicznie specjalne, natomiast generyczne rozwiązania z pozostałych klas są typu I w klasyfikacji CMPP. Zarówno metoda opisana w rozdziale 2 jak i rozwiązania z rozdziału 3 są wynikami oryginalnymi i zostały zawarte w publikacjach [14], [15].

W rozdziale 4 rodzina rozwiązań znaleziona w rodziale 3 rozważana jest w kontekście metody generowania nowych rozwiązań opartej na istnieniu ukrytej symetrii $SL(3,\mathbb{R})$, opisanej przez Maisona [26]. Po krótkim opisie metody następuje omówienie metryk, które można w ten sposób otrzymać, ich własności oraz możliwe zastosowania. Wyniki tej części zawarte są w publikacji [38].

Rozdział 1

Równania Einsteina dla D>4

Pierwszą poważną próbą opisu zjawisk fizycznych przy założeniu istnienia dodatkowych wymiarów była teoria Kaluzy-Kleina. W roku 1921 T. Kaluza [16] opisał model pięciowymiarowej czasoprzestrzeni. W modelu tym geometrią rządzą równania takie, jak w ogólnej teorii względności, ale czasoprzestrzeń posiada dodatkowy wymiar przestrzenny. Kaluza założył niezależność składowych metryki od współrzędnej odpowiadającej temu wymiarowi. W takim przypadku można odpowiednim składowym pięciowymiarowej metryki przypisać czterowymiarowe pola, a próżniowe pięciowymiarowe równania Einsteina redukują się do czterowymiarowych równań Einsteina z polem elektromagnetycznym oraz skalarnym, równań Maxwella i równania rządzącego polem skalarnym. Klein [19] rozwinął teorię Kaluzy w roku 1926. Jako pierwszy zaproponował on kompaktyfikację dodatkowego wymiaru jako sposób na wyjaśnienie jego niedostrzegalności.

Teoria Kaluzy-Kleina jest atrakcyjną propozycją unifikacji oddziaływań grawitacyjnych i elektromagnetycznych. Po odkryciu oddziaływań silnych i słabych oraz ich unifikacji z elektromagnetyzmem w modelu standardowym, naturalne było poszukiwanie sposobu na powiązanie ich z grawitacją za pomocą teorii wielowymiarowych. Początkowo z prób rozwinięcia modelu Kaluzy-Kleina powstały modele supergrawitacji, później zostały wyparte przez teorię strun. W przeciwieństwie do wszystkich dotychczasowych praw fizyki, w tym równań Einsteina, które dopuszczają naturalne uogólnienia do przestrzeni o dowolnej liczbie wymiatów, teoria strun dla spójności wymaga dokładnie 26 lub 10 wymiarów.

Pierwszym znalezionym rozwiązaniem równań Einsteina dla dowolnej liczby wymiarów było uogólnienie rozwiązania Schwarzschilda dla dowolnego D>4, którego dokonał w roku 1963 Tangherlini poszukując argumentu na rzecz istnienia dokładnie trzech wymiarów przestrzennych. Rozwiązanie to jest nastepującej postaci

$$g = -\left(1 - \frac{\mu}{r^{d-3}}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{\mu}{r^{d-3}}} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \ . \tag{1.1}$$

Rozwój teorii strun oraz modeli zakładających istnienie dodatkowych wymiarów spowodował dalszy wzrost zainteresowania rozwiązaniami wielowymiarowych równań Einsteina. Okazało się, że rozwiązanie Kerra również ma swój analog wielowymiarowy. Rozwiązanie opisujące rotującą czarną dziurę w dowolnej liczbie wymiarów i redukujące się do metryki Kerra dla D=4 znaleźli w 1986 r. Myers i Perry [28].

Tak jak w przypadku czasoprzestrzeni czterowymiarowej, udowodnione zostało [11], że uogólnione rozwiązanie Schwarzschilda (1.1) jest jedynym próżniowym i asymptotycznie płaskim rozwiązaniem opisującym statyczną czarną dziurę w D wymiarach. Jednak, w przeciwieństwie do przypadku czterowymiarowego, podobne twierdzenie dotyczące stacjonarnych czarnych dziur i rozwiązania Myersa-Perrego nie ma miejsca. W 2002r. Emparan i Reall [9] znaleźli próżniowe, asymptotycznie płaskie rozwiązanie w pięciu wymiarach opisujące rotującą czarną dziurę z horyzontem o topologi torusa - "black ring". W kolejnych latach, przy wykorzystaniu różnych technik generacji nowych rozwiązań, znaleziono rozwiązania opisujące stabilne konfiguracje czarnych dziur typu "black staturn" i "multi- black ring"[10]. Rozwiązania te pokazują o ile bogatszą strukturę może mieć wielowymiarowa grawitacja.

W obrębie zainteresowań teorii wielowymiarowych znalazły się również takie zagadnienia jak klasyfikacjia algebraiczna, przestrzenie Robinsona-Trautmana [31], klasa Kundta [3]. W dalszej części rozdziału omówione zostaną bardziej szczegółowo istotne z punktu widzenia niniejszej pracy zagadnienia: wielowymiarowe rozwiązania sferycznie symetryczne oraz klasyfikacja algebraiczna.

1.1 Metryki sferycznie symetryczne w czasoprzestrzeniach pięciowymiarowych

Szczególną rolę w teorii grawitacji odgrywają metryki sferycznie symetryczne. Opisując pole grawitacyjne na zewnątrz sferycznie symetrycznych rozkładów materii służą jako modele do opisu wielu obiektów astronomicznych. W teoriach wielowymiarowych rozwiązania takie pozwalają łatwo sprawdzić w jaki sposób modyfikować się będzie potencjał grawitacyjny, co jest ważne dla zbadania ich realistyczności i możliwości weryfikacji doświadczalnej.

Jak wynika z twierdzenia Birkhoffa metryka Schwarzschilda jest najbardziej ogólnym sferycznie symetrycznym rozwiązaniem czterowymiarowych równań Einsteina. Dopuszczenie dodatkowych wymiarów pozwala na uzyskanie innych, potencjalnie użytecznych, rozwiązań o wysokiej symetrii. W dalszej części pracy określenie „sferyczna symetria" używane będzie w kontekście sfer n-wymiarowych, a więc ogólnie symetrii SO(n). W szczególności sferycznie symetryczne rozwiązanie Tangherliniego w pięciu wymiarach jest niezmiennicze względem działania grupi SO(4). Jeżeli, dla równań Einsteina w pięciu wymiarach, zawęzić zainteresowanie do metryk o symetrii SO(3), okazuje się, że istnieje dokładnie jedna rodzina metryk, które są asymptotycznie płaskie, statyczne oraz niezależne od piątego wymiaru [33]. Jest to dwuparametrowa rodzina rozwiązań znaleziona przez Grossa i Perry'ego w 1983 roku [13] podczas badania rozwiązań solitonowych w teorii Kaluzy-Kleina. Metryki te mają następującą postać

$$g = -\left(\frac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{m}{r}}\right)^{\frac{2}{\alpha}} dt^2 + \left(1+\frac{m}{r}\right)^4 \left(\frac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{m}{r}}\right)^{\frac{2(\alpha-\beta-1)}{\alpha}} \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) + \left(\frac{1-\frac{m}{r}}{1+\frac{m}{r}}\right)^{\frac{2\beta}{\alpha}} dy^2 \ , \tag{1.2}$$

gdzie parametry α i β spełniają relację

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \beta + 1} \ . \tag{1.3}$$

Rozwiązania (1.2) szczególnej postaci zostały niezależnie znalezione przez Sorkina [37], a cała rodzina rozwiązań przez Kramera [20] oraz przez Dawidsona i Owena [7], którzy podjeli próbę interpretacji tych metryk w ramach modeli branowych.

Rozdział 2 i 3 niniejszej pracy poświęcony jest m.in. znalezieniu uogólnienia metryk (1.2) dla wymiaru D>5, natomiast w rozdziale 4 otrzymane metryki są wykorzystane do poszukiwania dalszych nowych rozwiązań przy użyciu pewnej metody generowania rozwiązań. Do niektórych zastosowań wygodniejsza będzie postać metryki otrzymana po zamianie zmiennych zaproponowanej w pracy [34]. Przyjmując nową współrzędną ρ i nowe parametry M, a, b w następujący sposób

$$\rho = r\left(1+\frac{m}{r}\right)^2 \tag{1.4}$$

$$M = 2m \ , \tag{1.5}$$

$$a = \frac{1}{\alpha} \ , \tag{1.6}$$

$$b = \frac{\alpha}{\beta} \ . \tag{1.7}$$

metrykę (1.2) można zapisać następująco

$$g = -A^a dt^2 + A^{-a-b} d\rho^2 + \rho^2 A^{1-a-b} d\Omega^2 + A^b dy^2 \ , \tag{1.8}$$

gdzie

$$A = 1 - \frac{2M}{\rho} \ . \tag{1.9}$$

Nowe parametry spełniają relację

$$a^2 + ab + b^2 = 1 \ . \tag{1.10}$$

Postać (1.8) metryki przypomina strukturą rozwiązanie Schwarzschilda w standardowej postaci. Jeżeli przyjąć wartości parametrów $a = 1$ i $b = 0$ (co odpowiada przyjęciu $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ dla oryginalnej postaci metryki) otrzymujemy rozwiązanie będące prostym zanurzeniem metryki Schwarzschilda w przestrzeni pięciowymiarowej

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 + dy^2 \ . \tag{1.11}$$

Rozwiązanie to, funkcjonujące w literaturze pod nazywą "black string" ze względu na rozciągnięcie osobliwości $\rho = 0$ wzdłuż całej osi y , jest często rozważane (z różnymi modyfikacjami) w kontekście modeli branowych takich jak model Randall-Sundrum [1].

Inne ciekawe rozwiązanie otrzymujemy dla $a = 0$ i $b = 1$ ($\alpha \to \infty$ i $\beta \to \infty$):

$$g = -dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{\rho}\right)} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 + \left(1 - \frac{2M}{\rho}\right) dy^2 \ . \tag{1.12}$$

Rodzina metryk (1.2) była szeroko omawiana w ramach wielowymiarowych modeli grawitacji. W szczególności Ponce de Leon poszukiwał wśród nich rozwiązań opisujących pole grawitacyjne na zewnątrz gwiazdy [34], [32]. Jego podejście jest podobne do formalizmu opisanego w przeglądowej pracy Maartensa [23]. Aby otrzymać z równań pięciowymiarowych obraz dla czterowymiarowych podprzestrzeni dokonuje cięcia $y = const$. Jako metrykę na powierzchniach $y = const$ przyjmuje dokładnie część czterowymiarową rozwiązania (1.2) lub metrykę do niej konforemnie równoważną. Ponce de Leon bada rodzinę (1.2) z jedną modyfikacją - nie zakłada że dodatkowy wymiar jest czasowy czy przestrzenny, co sprowadza się do dowolności znaku przy członie dy^2. Potencjalnie interesujące rozwiązania identyfikuje badając m.in. indukowany na czterowymiarowych podprzestrzeniach tensor energii-pędu.

Ponce de Leon znalazł w ten sposób rozwiązanie dające dodatnio określony tensor, które ponadto daje wynik zgodny z przybliżeniem newtonowskim.

W ostatnich latach szczególną postać metryki (1.2) rozważał również Millward. W pracy [24] badał własności i potencjalne zastosowania metryki, która odpowiada (1.2) z parametrem $\beta = 1$ i ma następującą postać

$$g = e^{2b}\left(-dt^2 + dy^2\right) + \frac{9M^2}{e^{4b}\sinh^4\left(\sqrt{3}b\right)}db^2 + \frac{3M^2}{e^{4b}\sinh^4\left(\sqrt{3}b\right)}d\Omega^2 \ , \tag{1.13}$$

gdzie zmiena b jest powiązana ze zmienną r w metryce (1.2) następująco

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right| \ . \tag{1.14}$$

Opisu rodziny (1.2) z geometrycznego punktu widzenia dokonał Lake [22] klasyfikując rozwiązania m.in. ze względu na rodzaj osobliwości.

1.2 Klasyfikacja algebraiczna metryk w D wymiarach

W 1954r. A.Z. Petrov dokonał opisu symetrii algebraicznych tensora Weyla w przestrzeni czterowymiarowej. Klasyfikacja ta okazała się bardzo użyteczna przy studiowaniu rozwiązań równań Einsteina. W oryginalnym ujęciu metodę Petrova można sprowadzić do zagadnienia własnego

$$\frac{1}{2}C_{abcd}X^{cd} = \lambda X_{ab} \ , \tag{1.15}$$

gdzie tensor Weyla jest traktowany jako operator liniowy działający na przestrzeni dwuwektorów. Ze względu na symetrie tensora Weyla zagadnienie to jest czterowymiarowe, a krotność jego rozwiązań definiuje klasy Petrova.

Przez lata rozwinięte zostały równoważne sformułowania zagadnienia. Jedno z nich odwołuje się do zależności między tensorem Weyla a pewnym zerowym polem wektorowym l

$$l_{[e}C_{a]bc[d}l_{f]}l^b l^c = 0 \ . \tag{1.16}$$

Pole l spełniające (1.16) nazywamy kierunkiem głównym tensora Weyla (PND - Principal Null Direction). W ogólności istnieją cztery kierunki główne, a w zależności od stopnia degeneracji rozwiązań zdefiniowane są następujące klasy:

- Typ I - cztery różne kierunki główne
- Typ II - jeden kierunek główny powtórzony, dwa pozostałe różne
- Typ D - dwa powtórzone kierunki główne
- Typ III - jeden z kierunków głównych jest potrójny
- Typ N - poczwórny kierunek główny
- Typ O - tensor Weyla równy zero

Przestrzenie, dla których rozwiązanie w każdym punkcie jest zdegenerowane nazywane są algebraicznie specjalnymi. Klasyfikacja Petrova została również sformułowana przy użyciu formalizmu spinorowego.

Klasyfikacja Petrova zapewnia niezależną od układu odniesienia charakterystykę metryki. Znalazła ona zastosowanie przy poszukiwaniu nowych rozwiązań równań Einsteina. Narzucenie ograniczeń na typ Petrova może pozwolić na takie uproszczenie równań, które pozwala na ich rozwiązanie, jak w przypadku rozwiązania Kerra [18]. Ponadto wiele metryk algebraicznie specjalnych posiada interesującą interpretację fizyczną. Poza wspomnianą metryką Kerra algebraicznie specjalne są m.in. metryki Friedmana-Robertsona-Walkera oraz Robinsona-Trautmana.

Stąd zainteresowanie, aby dokonać podobnej klasyfikacji dla przestrzeni wielowymiarowych. Próby rozwinięcia metodologi znanej z przestrzeni czterowymiarowej i rozszerzenia jej na większą ilość wymiarów dokonywane były dla różnych podejść do klasyfikacji Petrova. Coley, Milson, Pravda i Pravdova [5, 25] zaproponowali klasyfikację algebraiczną w dowolnej liczbie wymiarów bazując na podejściu do klasyfikacji w D=4 opartym na głównych kierunkach zerowych tensora Weyla. De Smet [36] podjął próbę rozwinięcia wielowymiarowej klasyfikacji startując z podejścia spinorowego, jednak jego metoda stosuje się tylko do przypadku D=5. Okazało się, że choć w większości metryki uznane za algebraicznie specjalne w ujęciu De Smeta będą algebraicznie specjalne w ujęciu Coley'a, Milsona, Pravdy i Pravdovej, podejścia te nie dają równoważnych wyników i nie ma między nimi prostej relacji. Nierównoważna z powyższymi jest, również rozważana, klasyfikacja oparta na podejściu dwuwektorowym [4]. Klasyfikacja algebraiczna Coley'a, Milsona, Pravdy i Pravdovej jest obecnie najbardziej rozwinięta i częściej stosowana, dlatego też to ta klasyfikacja jest użyta przy opisie metryk w rozdziale 3.

Punktem wyjścia do dokonania klasyfikacji algebraicznej dla dowolnej liczby wymiarów są w pracy [5] własności transformacyjne tensora Weyla pod działaniem właściwych transformacji Lorentza. Rozważania przeprowadzone są w bazie zerowej, takiej że

$$g_{ab} = 2l_{(a}n_{b)} + \delta_{jk}m^j{}_a m^k{}_b \ , \tag{1.17}$$

gdzie indeksy $a, b, \ldots$ przebiegają od 0 do $N-1$, natomiast $j, k, \ldots$ od 1 do $N-1$. Transformacje Lorentza w bazie zerowej mają postać

- obrót zerowy wokół l z parametrami z_i

$$l \to l \ , \quad n \to n + z_i m^i - \frac{1}{2}\delta^{ij} z_i z_i l \ , \quad m_i \to m_i - z_i l \tag{1.18}$$

- boost z parametrem λ

$$l \to \lambda l \ , \quad n \to \lambda^{-1} n \ , \quad m_i \to m_i \tag{1.19}$$

- obrót przestrzenny

$$l \to l \ , \quad n \to n \ , \quad m_i \to X^j{}_i m_j \ , \tag{1.20}$$

  gdzie $X^j{}_i$ to macierz ortogonalna.

Mówimy, że składowa tensora ma wagę b względem boostu, jeżeli przy transformacji (1.19) ulega przeskalowaniu o λ^b. Przykładowo składowa C_{0i0j} tensora Weyla ma wagę 2, gdyż

$$C_{abcd} l^a m^a{}_i l^c m^d{}_j \to \lambda^2 C_{abcd} l^a m^a{}_i l^c m^d{}_j \ . \tag{1.21}$$

W ogólności tensor Weyla można rozłożyć w bazie (1.17) na składniki o wagach od -2 do 2 w następujący sposób

$$\begin{aligned} C_{abcd} = {} & \underbrace{4C_{0i0j} n_{\{a} m^i_b n_c m^j_{d\}}}_{2} + \underbrace{8C_{010i} n_{\{a} l_b n_c m^i_{d\}} + 4C_{0ijk} n_{\{a} m^i_b m^j_c m^k_{d\}}}_{1} + \\ & + \underbrace{4C_{0101} n_{\{a} l_b n_c l_{d\}} + 4C_{01ij} n_{\{a} l_b m^i_c m^j_{d\}} + 8C_{0i1j} n_{\{a} m^i_b l_c m^i_{d\}} + C_{ijkl} m^i_{\{a} m^j_b m^k_c m^l_{d\}}}_{0} + \\ & + \underbrace{8C_{101i} l_{\{a} n_b l_c m^i_{d\}} + 4C_{1ijk} l_{\{a} m^i_b m^j_c m^k_{d\}}}_{-1} + \underbrace{4C_{1i1j} l_{\{a} m^i_b l_c m^j_{d\}}}_{-2} \ . \end{aligned} \tag{1.22}$$

W powyższym wzorze została zastosowana następująca notacja

$$T_{\{abcd\}} = \frac{1}{2}\left(T_{[ab][cd]} + T_{[cd][ab]}\right) \ . \tag{1.23}$$

Klasyfikacja Coley'a, Milsona, Pravdy i Pravdovej opiera się na istnieniu pewnych zerowych wektorów stowarzyszonych z tensorem Weyla. W [5] wprowadzona jest następująca terminologia. Wektor zerowy l nazywany jest „Weyl aligned null direction" (WAND) jeżeli składowe $b = 2$ tensora Weyla znikają. Stopień dopasowania wektora l określa jaka jest najwyższa waga względem boostu niezerowych składowych tensora Weyla. Wektor l, który jest WAND może być stopnia 0, 1, 2, 3, jeżeli najwyższa waga wynosi odpowiednio $b = 1,\ 0,\ -1,\ -2$. W zależności od tego, o jakim najwyższym stopniu można znaleźć wektor zerowy dla danej przestrzeni, określone zostały następujące typy

$$\begin{aligned} Typ \quad G:&\ \text{WAND nie istnieje} && (1.24)\\ Typ \quad I:&\ C_{0i0j} = 0 && (1.25)\\ Typ \quad II:&\ C_{0i0j} = C_{0ijk} = 0 && (1.26)\\ Typ \quad III:&\ C_{0i0j} = C_{0ijk} = C_{ijkl} = C_{01ij} = 0 && (1.27)\\ Typ \quad N:&\ C_{0i0j} = C_{0ijk} = C_{ijkl} = C_{01ij} = C_{1ijk} = 0\ . && (1.28)\\ Typ \quad O:&\ \text{tensor Weyla jest równy zero.} && (1.29) \end{aligned}$$

Jest to tak zwana klasyfikacja podstawowa dla tensora Weyla w przestrzeniach o dowolnym wymiarze. Warunek (1.25) jest równoważny z (1.16) dla dowolnego wymiaru [25], a różnica pomiędzy przypadkiem czterowymiarowym a wielowymiarowym polega m.in. na tym, że dla D>5 równanie (1.16) nie zawsze ma rozwiązanie. Kolejną różnicą jest to, że poza D=4 nie zawsze można wybrać wektor n tak, aby również spełniał (1.16). Dlatego w [5] wprowadzono również tzw. klasyfikację drugiego stopnia. Polega ona na sprawdzeniu czy można dodatkowo wybrać wektor n w taki sposób, aby zerowały się składowe tensora Weyla o wadze $b = -2$ (n jest WAND stopnia 0) albo $b = -2$ i $b = -1$ (n jest WAND stopnia 1). Ostateczna kalsyfikacja opiera się na określeniu typu (1.24)-(1.29) jednocześnie dla l i n. W ten sposób w obrębie typów I, II, III można wyodrębnić specjalne klasy I_i, II_i, III_i oraz II_{ii} (inaczej oznaczana jako D). Tabela poniżej zawiera definicję pełnego typu w zależności od stopnia dla wektorów l i n (jeżeli istnieje).

G	I	I_i	II	II_i	D	III	III_i	N	O
G	(0)	(0,0)	(1)	(1,0)	(1,1)	(2)	(2,0)	(3)	(4)

Dla D=4 powiższa klasyfikacjia redukuje się dokładnie do klasyfikacji Petrova [5]. Jednak własności stowarzyszonych kierunków głównych tensora Weyla dla D>4 mają inne własności niż kierunki główne dla D=4. M.in. dla D>4 tensor Weyla nie zawsze posiada stowarzyszony kierunek zerowy lub może posiadać ich nieskończenie wiele, stąd wprowadzono inną terminologię. Ponadto, mimo że ze względu na istnienie dla D>4 typu G, typ *I* jest już, w przypadku wielowymiarowym, przypadkiem specjalnym, aby utrzymać analogię do D=4, metrykę wielowymiarową określa sie jako algebraicznie specjalną jeżeli posiada w każdym punkcie stowarzyszony wektor zerowy o stopniu 1 lub wyższym.

Zarówno omówiona powyżej klasyfikacja, jak i związana z nią metodologia są w dalszym ciągu rozwijane. Ortaggio [30] opisał uogólnienie kryteriów Bela dla klasyfikacji CMPP. Są one bardziej skomplikowane niż dla czterech wymiarów. W szczególności warunek $C_{abcd}l^d = 0$, który jest wystarczający w 4D aby metryka była typu N, dla D>4 jest jedynie warunkiem koniecznym. Ponadto rozważane są możliwe dalsze uszczegółowienia klasyfikacji.

Rozdział 2

Redukcja równań Einsteina dla D=N+n+1

Jedną z podstawowych metod poszukiwania fizycznie istotnych rozwiązań równań Einsteina jest redukcja równań przy założeniu pewnej symetrii czasoprzestrzeni. Tak otrzymuje się w czterowymiarowej grawitacji sferycznie symetryczne rozwiązanie Schwarzschilda czy jednorodne i izotropowe modele wszechświata Friedmana-Robertsona-Walkera. W rozdziale tym omówiona jest redukcja wielowymiarowych równań Einsteina, a przedstawiona tu metoda posłuży w rozdziale 3 do znalezienia nowych rozwiązań. Podrozdział 2.1 zawiera redukcję równań Einsteina ze stałą kosmologiczną przy założeniu symetrii SO(n+1). Wynikiem są równania z polem skalarnym. W podrozdziale 2.2 równania te są dalej redukowane przy wykorzystaniu dodatkowych założeń.

2.1 Redukcja równań Einsteina ze stałą kosmologiczną dla D=N+n+1

Rozważamy czasoprzestrzeń o wymiarze $N + n + 1$. Równania Einsteina ze stałą kosmologiczną mają następującą postać

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.1}$$

Bardziej użyteczną postać powyższych równań można otrzymać zauważając, że w wymiarze $N + n + 1$ skalar Ricciego i stała kosmologiczna powiązane są zależnością

$$R = \frac{2(N+n+1)}{N+n-1}\Lambda \ . \tag{2.2}$$

Równania (2.1) przepisane przy użyciu tensora Ricciego zamiast tensora Einsteina są postaci
$$R_{\mu\nu} = \frac{2}{N+n-1}\Lambda g_{\mu\nu} \ , \tag{2.3}$$
W celu uproszczenia problemu znalezienia rozwiązań równań (2.3) załóżmy, że (N+n+1)-wymiarowa metryka ma symetrię $SO(n+1)$, a orbitami działania tej grupy są n-wymiarowe sfery. Oznacza to, że istnieją lokalne współrzędne $x^\mu = \left\{x^A, x^a\right\}$, $A = 0, 1, \cdots, N$; $a = N+1, \cdots, N+n$ takie, że metryka ma następującą postać
$$g = g_{AB}dx^A dx^B + e^{2f} s_{ab} dx^a dx^b, \tag{2.4}$$
gdzie $s_{ab}dx^a dx^b$ jest metryką sfery n-wymiarowej oraz g_{AB} i f są funkcjami wyłącznie współrzędnych x^A. Policzone dla metryki (2.4) składowe tensora Ricciego są następujące (szczegóły w Dodatku 1)
$$R_{Ab} = 0 \tag{2.5}$$
$$R_{ab} = \left[n - 1 - e^{2f}\left(\Box' f + n f^{|A} f_{|A}\right)\right] s_{ab} \tag{2.6}$$
$$R_{AB} = R'_{AB} - n f_{|A} f_{|B} - n f_{|AB}, \tag{2.7}$$
gdzie $_{|A}$, $\Box'$, R'_{AB} oznaczają odpowiednio: pochodną kowariantną, operator d'Alemberta oraz tensor Ricciego dla metryki $g' = g_{AB}dx^A dx^B$.

W dalszej części rozważań zakładać będziemy, że $N > 1$ (rozwiązaniem o symetrii $SO(n+1)$ dla $N = 1$ jest rozwiązanie Tangerhliniego [39]). Celem uproszczenia ostatecznych równań można, dla $N > 1$, dokonać następującej transformacji konforemnej metryki g'
$$\widetilde{g} = e^{\frac{2n}{N-1}f} g'. \tag{2.8}$$
Korzystając ze znanych wzorów (patrz Dodatek 2) otrzymujemy
$$\widetilde{R}_{AB} = R'_{AB} - n f_{|AB} - \frac{n}{N-1} g'_{AB}\Box f + \frac{n^2}{N-1} f_{|A} f_{|B} - g'_{AB}\frac{n^2}{N-1} f^{|C} f_{|C}, \tag{2.9}$$
$$\widetilde{\Box} f = e^{-2\frac{n}{N-1}}\Box f + n e^{-2\frac{n}{N-1}} f^{|C} f_{|C}, \tag{2.10}$$
gdzie $\widetilde{R}_{AB}$ jest tensorem Ricciego metryki $\widetilde{g}$, średnik oznacza pochodną kowariantną względem metryki $\widetilde{g}$ oraz $\widetilde{\Box} f = \widetilde{g}^{AB} f_{;AB}$. Korzystając z zależności (2.9) i (2.10) tensor Ricciego metryki (2.4) można wyrazić przez wielkości związane z $\widetilde{g}$,
$$R_{ab} = \left[(n-1) - e^{2\frac{n+N-1}{N-1}}\widetilde{\Box} f\right] s_{ab} \tag{2.11}$$
$$eR_{AB} = \widetilde{R}_{AB} + \frac{n}{N-1}\widetilde{g}_{AB}\widetilde{\Box} f - n\frac{n+N-1}{N-1} f_{;A} f_{;B}, \tag{2.12}$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równań Einsteina (2.3) otrzymujemy następujące równania

$$\widetilde{\Box} f = (n-1) - \frac{2}{n+N-1}\Lambda e^{-\frac{2n}{N-1}f} \ , \tag{2.13}$$

$$\widetilde{R}_{AB} = \frac{n(n+N-1)}{N-1} f_{;A} f_{;B} - \left(\frac{n}{N-1}\widetilde{\Box} f - \frac{2\Lambda}{n+N-1} e^{-\frac{2n}{N-1}f} \right) \widetilde{g}_{AB} \ . \tag{2.14}$$

Z równania (2.14) można wyliczyć skalar Ricciego dla metryki $\widetilde{g}$,

$$\widetilde{R} = \frac{n(n+N-1)}{N-1} f^{;C} f_{;C} - (N+1) \left(\frac{n}{N-1}\widetilde{\Box} f - \frac{2\Lambda}{n+N-1} e^{-\frac{2n}{N-1}f} \right) \ . \tag{2.15}$$

Podstawiając (2.13) do (2.14) i (2.15) oraz przechodząc do tensora Einsteina otrzymujemy następujące równanie

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_{AB} = n\frac{n+N-1}{N-1} &\left(f_{;A} f_{;B} - \frac{1}{2} f^{;C} f_{;C} \widetilde{g}_{AB} \right) + \\ &- \left(-\frac{1}{2} n\,(n-1)\, e^{-2\frac{n+N-1}{N-1}f} + \Lambda e^{-\frac{2n}{N-1}f} \right) \widetilde{g}_{AB} \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Po przeskalowaniu

$$\phi = \sqrt{\frac{n\,(n+N-1)}{(N-1)}} f \tag{2.17}$$

równania (2.13) i (2.16) przyjmują postać

$$\widetilde{G}_{AB} = \phi_{;A}\phi_{;B} - \left(\frac{1}{2}\phi^{;C}\phi_{;C} + V(\phi) \right) \widetilde{g}_{AB} \tag{2.18}$$

$$\widetilde{\Box}\phi = V_{,\phi} \ , \tag{2.19}$$

gdzie

$$V(\phi) = \left(-\frac{1}{2} n\,(n-1)\, e^{-2\sqrt{\frac{(n+N-1)}{n(N-1)}}\phi} + \Lambda e^{-2\sqrt{\frac{n}{(N-1)(n+N-1)}}\phi} \right) . \tag{2.20}$$

Tak więc (N+n+1)-wymiarowe, próżniowe równania Einsteina dla metryki o symetrii $SO(n+1)$ sprowadzają się do równań (N+1)-wymiarowych z polem skalarnym (2.18), (2.19) o potencjale (2.20).

2.2 Redukcja równań Einsteina z polem skalarnym dla D=N+1

Zajmiemy się teraz redukcją równań Einsteina z polem skalarnym (2.18) i (2.19), dla wymiaru $N+1 \geq 3$ (aby zachować zgodność z warunkiem $N \neq 1$ wymaganym w poprzednim podrozdziale), przy czym nie będziemy zakładać konkretnej postaci potencjału.

Załóżymy, że pole skalarne nie jest stałe, czyli $\phi_{,a} \neq 0$, oraz że powierzchnie $\phi = const$ nie są powierzchniami zerowymi. W takim przypadku wybierając współrzędne x^i na powierzchni $\phi = const$, można $N+1$ wymiarową metrykę $\widetilde{g}$ zapisać w następującej postaci

$$\widetilde{g} = \widetilde{g}_{\phi\phi} d\phi^2 + \widetilde{g}_{ij} dx^i dx^j \ . \tag{2.21}$$

Jeżeli okaże się, że $\widetilde{g}_{\phi\phi} < 0$, czyli współrzędna ϕ jest współrzędną czasową, ustalamy $x^0 = \phi$ oraz $i = 1, ..., N$. Jeżeli współrzędna ϕ jest przestrzenna ($\widetilde{g}_{\phi\phi} > 0$), wtedy $x^N = \phi$ oraz $i = 0, ..., N-1$.

Założmy dodatkowo, że funkcja $\widetilde{g}_{\phi\phi}$ jest niezależna od współrzędnych x^i. Możemy teraz znaleźć nową współrzędną s taką, że

$$\phi = \phi(s) \tag{2.22}$$

oraz

$$\widetilde{g} = \epsilon ds^2 + \widetilde{g}_{ij} dx^i dx^j \ , \ \epsilon = \pm 1 \ . \tag{2.23}$$

Suma powyższych założeń oznacza, że pole wektorów normalnych do powierzchni $\phi = const$ jest geodezyjne, czasowe ($\epsilon = -1$) lub przestrzenne ($\epsilon = 1$), a s jest parametrem afinicznym. Wykorzystamy teraz to założenie do uproszczenia równania (2.19).

Podstawiając metrykę $\widetilde{g}$ w postaci (2.23) oraz (2.22) do równania (2.19) otrzymujemy

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}\widetilde{g}^{ij}\dot{\widetilde{g}}_{ij} = \epsilon V_{,\phi} \ , \tag{2.24}$$

gdzie kropka oznacza pochodną cząstkową po współrzędnej s. Wprowadzając oznaczenie

$$\sigma = |det(\widetilde{g}_{ij})|^{\frac{1}{2}} \ , \tag{2.25}$$

równanie (2.24) możemy zapisać w następującycej postaci

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi}(\ln\sigma)^{\cdot} = \epsilon V_{,\phi} \ , \tag{2.26}$$

Z powyższego równania można wywnioskować, że $(\ln\sigma)^{\dot{}}$ jest funkcją zależną jedynie od współrzędnej s. Stąd wynika, że σ jest iloczynem pewnej funkcji współrzędnej s oraz pewnej funkcji współrzędnych x^i, czyli wprowadzając odpowiednie oznaczenia mamy

$$\sigma = \beta(s)\sigma_0(x^i). \tag{2.27}$$

Wykorzystując (2.27), równanie (2.26) można sprowadzić do postaci

$$(\beta\dot{\phi})^{\dot{}} = \epsilon\beta V_{,\phi}\ , \tag{2.28}$$

Otrzymaliśmy więc wniosek, że po wprowadzeniu odpowiednich założeń równanie (2.19) redukuje się do warunku (2.27) na wyznacznik metryki $\widetilde{g}$ oraz do równania różniczkowego na dwie funkcje β oraz ϕ współrzędnej s.

Zajmijmy się teraz równaniami (2.18). Wprowadźmy, dla ułatwienia zapisu, następujące wielkości

$$\pi^i{}_j = \frac{1}{2}\sigma\widetilde{g}^{ik}\dot{\widetilde{g}}_{kj} - \dot{\sigma}\delta^i{}_j\ , \tag{2.29}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[\frac{(\pi^i{}_i)^2}{N-1} - \pi^i{}_j\pi^j{}_i\right]\ . \tag{2.30}$$

Wielkość $\pi^i{}_j$ jest związana z krzywizną zewnętrzną $K_{ij} = \frac{1}{2}\dot{\widetilde{g}}_{ij}$ powierzchni $s = const$, a dokładniej $\pi^i{}_j = \sigma\left(K^i{}_j - K\delta^i{}_j\right)$.

Używając (2.30) i (2.29) składowe tensora Einsteina dla metryki (2.23) można zapisać w następującej postaci (szczegóły w Dodatku C)

$$\widetilde{G}^i{}_j = \hat{G}^i{}_j - \epsilon\sigma^{-1}\dot{\pi}^i{}_j - \epsilon\sigma^{-2}\Pi\delta^i{}_j\ , \tag{2.31}$$

$$\widetilde{G}^s{}_j = \epsilon(\sigma^{-1}\pi^k{}_j)_{;k}\ , \tag{2.32}$$

$$\widetilde{G}^s{}_s = -\frac{1}{2}\hat{R} + \epsilon\sigma^{-2}\Pi\ , \tag{2.33}$$

gdzie $\hat{G}$ i $\hat{R}$ to, odpowiednio, tensor Einsteina i skalar Ricciego metryki

$$\hat{g} = \widetilde{g}_{ij}dx^i dx^j\ . \tag{2.34}$$

Podstawiając te wyrażenia do równania (2.18) (z podniesionym jednym indeksem), otrzymujemy następujące równania do rozwiązania

$$\hat{G}^i{}_j - \epsilon\sigma^{-1}\dot{\pi}^i{}_j - \epsilon\sigma^{-2}\Pi\delta^i{}_j = -\left(V + \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2\right)\delta^i{}_j\ , \tag{2.35}$$

$$\epsilon(\sigma^{-1}\pi^k{}_j)_{;k} = 0\ , \tag{2.36}$$

$$-\frac{1}{2}\hat{R} + \epsilon\sigma^{-2}\Pi = \frac{1}{2}\epsilon\dot{\phi}^2 - V \ , \tag{2.37}$$

Zauważmy, że równanie (2.35) uprości się znacznie, jeżeli wprowadzimy dodatkowe (poza (2.22) oraz (2.23)) założenie, że tensor $\hat{G}^i{}_j$ jest proporcjonalny do $\delta^i{}_j$:

$$\hat{G}^i{}_j + \hat{\Lambda}\delta^i{}_j = 0 \ . \tag{2.38}$$

Z tożsamości Bianchi $\nabla^i\hat{G}_{ij}{=}0$ wynika, że $\hat{\Lambda}$ jest stałą ze względu na współrzędne x^i, czyli $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(s)$. Ponadto można zauważyć, że dla N=2 zachodzi $\hat{\Lambda} = 0$, ponieważ tensor Einsteina dla dwuwymiarowych metryk jest tożsamościowo równy zero.

Po uwzględnieniu założenia (2.38) równanie (2.35) przyjmuje następującą formę

$$\dot{\pi}^i{}_j = \sigma\left(-\epsilon\hat{\Lambda} - \sigma^{-2}\Pi + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \epsilon V\right)\delta^i{}_j \ . \tag{2.39}$$

Z powyższego równania widać, że pochodna po współrzędnej s macierzy $\pi^i{}_j$ jest proporcjonalna do $\delta^i{}_j$, a stąd można wywnioskować, że $\pi^i{}_j$ musi być postaci

$$\pi^i{}_j = a\delta^i{}_j + \bar{P}^i{}_j(x^k) \ , \tag{2.40}$$

gdzie a jest pewną funkcją, a $\bar{P} = \left(\bar{P}^i{}_j\right)$ jest macierzą o współczynnikach zależnych jedynie od współrzędnych x^i. Ponieważ ślad macierzy $\bar{P}$ można uwzględnić w funkcji a, bez straty ogólności przyjmiemy $\bar{P}^i{}_i = 0$. Macierz $\pi^i{}_j$ jest N-wymiarowa, a więc jej ślad przy przyjętych założeniach wynosi

$$\pi^i{}_i = Na \ . \tag{2.41}$$

Z drugiej strony, z definicji $\pi^i{}_j$ (2.29) wiemy, że

$$\pi^i{}_i = (1-N)\dot{\sigma} \ . \tag{2.42}$$

Porównując oba wyrażenia na $\pi^i{}_i$ otrzymujemy, że $a = \left(\frac{1}{N} - 1\right)\dot{\beta}\sigma_0$. Ostatecznie do dalszych rachunków przyjmujemy macierz $\pi^i{}_j$ w postaci

$$\pi^i{}_j = \sigma_0\left[\left(\frac{1}{N} - 1\right)\dot{\beta}\delta^i{}_j + P^i{}_j(x^k)\right] \ , \tag{2.43}$$

gdzie $P = (P^i{}_j)$ jest przeskalowaną o σ_0 macierzą $\bar{P}$, a więc jej składowe nie zależą od współrzędnej s, oraz spełniony jest warunek

$$P^i{}_i = 0 \ . \tag{2.44}$$

Podstawiając (2.43) do definicji (2.30) otrzymujemy następujące wyrażenie

$$\Pi = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right) \dot{\beta}^2 - P^i{}_j P^j{}_i \right] \ . \tag{2.45}$$

Wyrażenia (2.43) i (2.45) można teraz wykorzystać w równaniach (2.29) i (2.39). Dzieląc równanie (2.39) (po podstawieniu (2.43) i (2.45)) przez σ_0 można zauważyć, że zależność od współrzędnych x^i tkwi jedynie w iloczynie $P^i{}_j P^j{}_i$, stąd wniosek

$$P^i{}_j P^j{}_i = const = 2c \ . \tag{2.46}$$

Po uwzględnieniu (2.46) równanie (2.39) redukuje się do

$$\left(\frac{1}{N} - 1\right)\left(\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{2\beta^2}\right) - \frac{c}{\beta^2} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \epsilon(\hat{\Lambda} - V) = 0 \ . \tag{2.47}$$

Jest to drugie (po (2.28)) równanie różniczkowe na funkcje $\beta(s)$ i $\phi(s)$. Jeżeli teraz podstawimy (2.43) do definicji (2.29) otrzymamy następujące liniowe równanie różniczkowe na macierz $\hat{g} = (\widetilde{g}_{ij})$

$$\dot{\hat{g}} - \frac{2\dot{\beta}}{N\beta}\hat{g} = \frac{2}{\beta}P\hat{g} \ . \tag{2.48}$$

Jego ogólne rozwiązanie jest postaci

$$\hat{g} = \beta^{2/N}\gamma(x^i)e^{P\tau(s)} \ , \tag{2.49}$$

gdzie $\gamma = (\gamma_{ij})$ jest macierzą niezależną od s, a τ jest funkcją powiązaną z funkcją β relacją

$$\beta\dot{\tau} = 2. \tag{2.50}$$

Ponieważ macierz $\hat{g}$ opisuje metrykę, należy zagwarantować, żeby była macierzą symetryczną. Musimy więc dodać następujące warunki

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \ , P_{ij} = P_{ji} \ , \tag{2.51}$$

gdzie $P_{ij} = \gamma_{ik}P^k{}_j$. Ponadto macierz γ_{ij} powinna być niezdegenerowana.

Podsumowując, otrzymujemy, że przy dodatkowym założeniu (2.38) równania (2.35) prowadzą do metryki $\hat{g}$ w postaci (2.49), warunków (2.44), (2.46) i (2.50) oraz do równania (2.47). Zauważmy, że z (2.49) wynika następująca zależność

$$\sigma_0 = |det\gamma|^{1/2} \ . \tag{2.52}$$

Równanie (2.36), po podstawieniu π w postaci (2.43), sprowadza się do następującego warunku

$$P^{k}_{i;k} = 0 \ . \tag{2.53}$$

Można sprawdzić, że pochodna $P^{k}_{i;k}$ po współrzędnej s znika, jeżeli spełnione są zależności (2.44) i (2.46). Wynika stąd, że pochodną kowariantną w tym wyrażeniu można traktować jako zdefiniowaną przez niezależną od współrzędnej s metrykę γ.

Równanie (2.37), po uwzględnieniu wyników (2.45) i (2.46), przyjmuje następującą postać

$$\epsilon\hat{R} = (1 - \frac{1}{N})\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - \frac{2c}{\beta^2} - \dot{\phi}^2 + 2\epsilon V \ . \tag{2.54}$$

Jeżeli pomnożymy równanie (2.54) przez β i obliczymy pochodną względem współrzędnej s, otrzymamy równanie w formie podobnej do równania (2.47). Porównując oba równania dostajemy następującą zależność

$$\frac{1}{2}\hat{R} + \frac{\beta}{2\dot{\beta}}\dot{\hat{R}} = \hat{\Lambda} \ . \tag{2.55}$$

Z założenia (2.38) wynika związek $\hat{\Lambda} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)\hat{R}$, po którego podstawieniu do równania (2.55) otrzymujemy równanie różniczkowe o następującym rozwiązaniu

$$\beta^{2/N}\hat{R} = const = N\lambda \ . \tag{2.56}$$

Uwzględniając związek pomiędzy tensorem Ricciego metryki $\hat{g}$ i tensorem Ricciego metryki $\gamma e^{P\tau}$: $\beta^{2/N}\hat{R}^{i}{}_{j} = R^{i}{}_{j}(\gamma e^{P\tau})$, założenie (2.38) oraz (2.56) można zapisać łącznie jako

$$R^{i}{}_{j}(\gamma e^{P\tau}) = \lambda\delta^{i}{}_{j} \ . \tag{2.57}$$

Tak więc, równanie (2.37) oraz założenie (2.38) zostały zastąpione przez (2.54) i (2.57). Ponadto, ponieważ dla metryk spełniających (2.57) i $\dot{\beta} \neq 0$ równanie (2.54) jest równoważne równaniu (2.47), możemy dla $\dot{\beta} \neq 0$ pominąć równanie (2.47).

Przypadek $\beta = const$ należy rozpatrzyć osobno. Równania (2.47) i (2.54) dopuszczają w tym przypadku rozwiązanie jedynie dla $V = const$. Jako ogólne rozwiązanie równań (2.28), (2.50), (2.47) i (2.54) można przyjąć

$$V = \frac{1}{2}(N-1)\lambda \tag{2.58}$$

$$\beta = 1 \ , \ \tau = 2s \ , \quad \phi = s\sqrt{-2c - \epsilon\lambda} \ , \quad 2c < -\epsilon\lambda \ . \tag{2.59}$$

Porównując (2.58) z (2.20) można zauważyć, że powyższe rozwiązanie można użyć do konstrukcji metryki próżniowej jedynie w przypadku $n = 1$ i $\lambda = 0$ (wtedy $V = 0$). Otrzymane w ten sposób metryki będą szczególnym przypadkiem metryk omówionych w rozdziale 3, wyliczonych przy założeniu $n = 1$.

2.3 Podsumowanie

Metodę poszukiwania (N+n+1)-wymiarowych próżniowych rozwiązań równań Einsteina o symetrii SO(n+1) przedstawioną w tym rozdziale można podsumować w następujących czterech krokach

1. Znalezienie N-wymiarowej metryki γ_{ij} i symetrycznego tensora P_{ij}, spełniających warunki (2.44), (2.46), (2.53) i (2.57)

$$
\begin{aligned}
P^i{}_i &= 0 \ , \\
P^i{}_j P^j{}_i &= const = 2c \ , \\
P^k{}_{i;k} &= 0 \ , \\
R^i{}_j(\gamma e^{P\tau}) &= \lambda \delta^i{}_j \ , \quad \lambda = const \ ,
\end{aligned}
$$

   z pochodną kowariantną względem γ.

2. Znalezienie funkcji ϕ, $\beta \neq const$ i τ zmiennej s, które na podstawie (2.54) i (2.56) spełniają równanie

$$\epsilon N \lambda \beta^{-\frac{2}{N}} = (1 - \frac{1}{N})\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - \frac{2c}{\beta^2} - \dot{\phi}^2 + 2\epsilon V \ . \tag{2.60}$$

   oraz

$$
\begin{aligned}
(\beta\dot{\phi})^{\dot{}} &= \epsilon \beta V_{,\phi} \ , \\
\beta\dot{\tau} &= 2 \ .
\end{aligned}
$$

3. Konstrukcja $(N+1)$-wymiarowej metryki z polem skalarnym o potencjale,

$$V(\phi) = \left(-\frac{1}{2} n (n-1) e^{-2\sqrt{\frac{(n+N-1)}{n(N-1)}}\phi} + \Lambda e^{-2\sqrt{\frac{n}{(N-1)(n+N-1)}}\phi} \right) \ ,$$

   która na podstawie (2.49) i(2.23) ma postać

$$\widetilde{g} = \epsilon ds^2 + \beta^{2/N}(\gamma e^{P\tau})_{ij} dx^i dx^j \ , \ \epsilon = \pm 1 \ . \tag{2.61}$$

4. Konstrukcja $(N+n+1)$-wymiarowej metryki próżniowej, która na podstawie (2.17), (2.8) i (2.4) ma postać

$$g = e^{-2\sqrt{\frac{n}{(N-1)(n+N-1)}}\phi} \widetilde{g}_{AB} dx^A dx^B + e^{2\sqrt{\frac{N-1}{n(n+N-1)}}\phi} s_{ab} dx^a dx^b. \tag{2.62}$$

Rozdział 3

Nowe rozwiązania

Rozdział ten zawiera konstrukcję metryk próżniowych na podstawie metody przedstawionej w rozdziale 2 W podrozdziale 3.1 znalezione są potrzebne w opisanej metodzie wielkości P i γ. W podrozdziale 3.2 prezentujemy proste rozwiązania równań na funkcje β, τ oraz ϕ i wynikające z nich, przy wykorzystaniu wyników wcześniejszego podrozdziału, metryki. Podrozdział 3.3 opisuje konstrukcję rodziny rozwiązań równań Einsteina zawierającej m.in. metrykę Grossa-Perry'ego.

3.1 Rozwiązanie warunków na P i γ

Konstrukcja rozwiązań (N+n+1)-wymiarowych równań Einsteina przedstawiona w poprzednim rozdziale wymaga wprowadzenia N-wymiarowej metryki γ i symetrycznego tensora P, spełniających warunki (2.44), (2.46), (2.53) i (2.57). Proste rozwiązanie tych warunków otrzymamy, jeżeli przyjmiemy, że wszystkie składowe tensora P i metryki γ są stałymi. Warunki (2.46), (2.53) i (2.57) są dla takich P i γ automatycznie spełnione. Ponadto, ponieważ w tym przypadku tensor Ricciego metryki $\gamma e^{P\tau}$ (gdzie τ jest funkcją niezależną od współrzędnych x^i metryki γ) jest tożsamościowo równy zero, warunek (2.57) spełniony jest z $\lambda = 0$. Spełnienie warunku (2.44) można łatwo zapewnić narzucając odpowiednią zależność pomiędzy stałymi. Możemy więc dla dowolnego wymiaru $N > 1$ przyjąć

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = const \ , \quad P_{ij} = P_{ji} = const \ , \quad P^i{}_i = 0 \ . \tag{3.1}$$

Powyższą postać γ i P dodatkowo uprościmy korzystając ze swobody wyboru współrzędnych x^i dla metryki $\gamma e^{P\tau}$. Najpierw diagonalizując, a potem przeskalowując współrzędne można sprowadzić γ do postaci z wartościami ± 1 na diagonali.

Dla $\epsilon = -1$ (3.1) odpowiada parametryzacji Misnera [27] dla modeli Bianchi I. W tym przypadku mamy x^i z $i = 1, ..., N$ i można przyjąć $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Macierz tensora P daje się więc zdiagonalizować równocześnie z γ.

Jeżeli $\epsilon = 1$ mamy $i = 0, ..., N-1$, więc przyjmujemy $\gamma_{ij} = \eta_{ij} = diag(-1, 1, ..., 1)$. Macierz P można w tym przypadku uprościć stosując N-wymiarowe transformacje Lorentza. Dla $N = 2$ otrzymujemy następujące kanoniczne postacie metryki $\gamma e^{P\tau}$ oraz odpowiadające im macierze P

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad , \quad c = a^2 > 0 \tag{3.2}$$

$$\gamma e^{P\tau} = -e^{a\tau} dt^2 + e^{-a\tau} dy^2 \ , \tag{3.3}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad c = -a^2 < 0 \tag{3.4}$$

$$\gamma e^{P\tau} = \cos(a\tau)(-dt^2 + dy^2) + 2\sin(a\tau) dt dy \ , \tag{3.5}$$

$$P = \begin{pmatrix} -a & a \\ -a & a \end{pmatrix} \quad , \quad c = 0 \tag{3.6}$$

$$\gamma e^{P\tau} = -du(dv - a\tau du) \ . \tag{3.7}$$

Natomiast dla $N = 3$ mamy

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -a-b \end{pmatrix} \quad , \quad c = a^2 + b^2 + ab > 0 \tag{3.8}$$

$$\gamma e^{P\tau} = -e^{a\tau} dt^2 + e^{b\tau} dy^2 + e^{-(a+b)\tau} dx^2 \ , \tag{3.9}$$

$$P = \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{pmatrix} \quad , \quad c = -a^2 + 3b^2 \tag{3.10}$$

$$\gamma e^{P\tau} = e^{b\tau} \cos(a\tau)(-dt^2 + dy^2) + 2e^{b\tau} \sin(a\tau) dt dy + e^{-2b\tau} dx^2 \ , \tag{3.11}$$

$$P = \begin{pmatrix} -a+b & a & 0 \\ -a & a+b & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{pmatrix} \quad , \quad c = 3b^2 > 0 \tag{3.12}$$

$$\gamma e^{P\tau} = . - du(e^{b\tau} dv - a\tau du) + e^{-2b\tau} dx^2 \ . \tag{3.13}$$

W powyższych wzorach t, y, lub u, v, oraz x oznaczają współrzędne, natomiast a i b są stałymi.

W przypadku $N = 2$ nie musimy się ograniczać do (3.1) , ponieważ w tym przypadku można znaleźć ogólne rozwiązanie równań na γ i P. Ponieważ dla $N = 2$ mamy $\hat{\Lambda} = 0$ otrzymujemy zależność

$$R^i{}_j\left(\gamma e^{P\tau}\right) - \frac{1}{2} R\left(\gamma e^{P\tau}\right) \delta^i{}_j = 0 \ . \tag{3.14}$$

Po porównaniu jej z równaniem (2.57), którego lewa strona nie zależy od współrzędnej s na podstawie (2.44) i (2.53), otrzymujemy wniosek, że dla $N = 2$ metryka γ ma stałą krzywiznę. Dla $\epsilon = 1$ możemy więc zapisać

$$\gamma = -\frac{dudv}{(1+\frac{\lambda}{4}uv)^2} \ . \tag{3.15}$$

Dzięki (3.15) można rozwiązać warunki (2.44), (2.46) i (2.53). Jeżeli $\lambda = 0$ to z (2.53) wynika, że składowe macierzy P są stałymi, a więc mamy do czynienia z przypadkiem (3.1). Natomiast dla $\lambda \neq 0$ otrzymujemy, że $c = 0$, a macierz P można bez straty ogólności przyjąć w postaci

$$P = h(u) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \tag{3.16}$$

gdzie $h(u)$ jest dowolną funkcją współrzędej u. Tak więc, jeżeli $c = 0$ otrzymujemy

$$\gamma e^{P\tau} = -\frac{dudv}{(1+\frac{\lambda}{4}uv)^2} + \tau h(u) du^2 \ . \tag{3.17}$$

W przypadku $c \neq 0$ mamy $\lambda = 0$ i metryka $\gamma e^{P\tau}$ zadana jest przez (3.3) lub (3.5).

3.2 Rozwiązania szczególne

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem równań (2.28), (2.60) i (2.50) z potencjałem zadanym przez (2.20). Będziemy przyjmować w równaniach $\epsilon = 1$, czyli że współrzędna s jest przestrzenna. Przyjmiemy również $\Lambda = 0$.

Jeżeli przyjmiemy $n = 1$, co odpowiada metrykom $(N+2)$-wymiarowym o symetrii SO(2), wtedy z wyrażenia (2.20) i założenia o zerowej stałej kosmologicznej $\Lambda = 0$ wynika, że $V = 0$. Równania (2.28) i (2.54) w takim przypadku znacznie się upraszczają i można je rozwiązać z dokładnością do kwadratur. Z równania (2.28) otrzymujemy

$$\dot{\phi} = \frac{2c'}{\beta} \ , \ c' = const \ . \tag{3.18}$$

Z porównania (3.18) z (2.50) wynika, że można przyjąć

$$\phi = c'\tau \ . \tag{3.19}$$

Równanie (2.60) po uwzględnieniu, (3.18) oraz $V = 0$, można zapisać w postaci następującej całki

$$s = \pm \int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{N}}d\beta}{\sqrt{\epsilon N\lambda\beta^{2\left(1-\frac{1}{N}\right)} + 2c + 4c'^2}} \ . \tag{3.20}$$

W celu skonstruowania metryki można teraz relacje (3.18)-(3.20) powiązać z rozwiązaniem warunków dla P i γ w postaci (3.1). Ponieważ dla (3.1) zachodzi $\lambda = 0$, z równania (3.20) wynika, że $\beta \sim s$. Korzystając z (2.61) i (2.62) można teraz znaleźć odpowiadającą temu rozwiązaniu metrykę próżniową. Jej składniki okazują się być zależne jedynie od współrzędnej s i są postaci β^a, $a = const.$ Tego typu metryki są proste do znalezienia przez bezpośrednie całkowanie równań Einsteina, nie są więc interesujące z punktu widzenia omawianej tu metody. W przypadku $N = 2$ otrzymujemy metrykę należącą do klasy metryk znalezionych przez Kasnera [17].

Ciekawsze rozwiązanie otrzymamy dla $N = 2$. W tym przypadku całkę w wyrażeniu (3.20) można wykonać dla dowolnego λ. Jeżeli $\lambda \neq 0$ (a więc $c = 0$) otrzymujemy następujące rozwiązanie

$$\beta = \lambda\left(s^2 - s_0^2\right) \ , \tag{3.21}$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{s - s_0}{s + s_0}\right| \ , \tag{3.22}$$

gdzie $s_0 = \frac{\sqrt{2}c'}{\lambda}$. Metryka $\gamma e^{P\tau}$ dla $N = 2$ i $c = 0$ jest zadana przez (3.17), otrzymujemy więc następującą metrykę próżniową

$$\begin{aligned} g = {} & -\epsilon'\left(s+s_0\right)^2 du\left(\frac{\lambda dv}{(1+\frac{\lambda}{4}uv)^2} - \ln\left|\frac{s-s_0}{s+s_0}\right| h'(u)du\right) + \\ & + \left|\frac{s+s_0}{s-s_0}\right| ds^2 + \left|\frac{s-s_0}{s+s_0}\right| d\varphi^2 \ , \end{aligned} \tag{3.23}$$

gdzie $\epsilon' = \pm 1$ jest znakiem $(s^2 - s_0^2)$, a $h' = \frac{h}{s_0}$ jest dowolną funkcją współrzędnej u.

Dla $\lambda = 0$ i $c = 0$ (dla $c \neq 0$ otrzymalibyśmy znowu metrykę zależną jedynie od współrzędnej s) rozwiązanie równań (3.18) i (3.20) jest następujące

$$\beta = \pm 2\sqrt{2}c's \ , \tag{3.24}$$

$$\phi = 4\sqrt{2}\ln|s| \ , \tag{3.25}$$

a otrzymana stąd metryka, po przeskalowaniu współrzędnych, jest postaci

$$g = -\epsilon' du\,(dv - \ln|s|h(u)du) + |s|^{-1}ds^2 + |s|\,d\varphi^2 \ , \tag{3.26}$$

gdzie $\epsilon' = \pm 1$ jest w tym przypadku znakiem s.

Metryki (3.23) i (3.26) posiadają zerową kongruencję geodezyjnych, bez ścinania, ekspansji i twistu, generowaną przez pole wektorowe ∂_v. Należą one do klasy metryk Kundta znalezionej przez Kramera i Neugebauera [21].

Proste rozwiązanie dla dowolnego n otrzymamy zakładając, że V i β mają formę as^b, gdzie a i b są stałymi. Otrzymujemy dwa rozwiązania tego typu, dla obu mamy $c = 0$. Dla jednego rozwiązania mamy $\lambda = 0$ oraz

$$e^{-2\sqrt{\frac{n+N-1}{n(N-1)}}\phi} = \frac{(N-1)^2}{(n+N-1)^2}s^{-2} \ , \tag{3.27}$$

$$\beta = \beta_0 s^{\frac{nN}{n+N-1}} \ , \tag{3.28}$$

$$\tau = \frac{2}{\beta_0(N+1)}s^{N+1} \ . \tag{3.29}$$

Drugie rozwiązanie zadane jest przez

$$\lambda = \frac{(N-1)^2}{n+N-1}\beta_0^{2/N} \ , \tag{3.30}$$

$$e^{-2\sqrt{\frac{n+N-1}{n(N-1)}}\phi} = \frac{(N-1)^2}{(n-1)(n+N-1)}s^{-2} \ , \tag{3.31}$$

$$\beta = \beta_0 s^N \ , \tag{3.32}$$

$$\tau = \frac{2(n+N-1)}{\beta_0(N-1)(n-1)}s^{-\frac{(N-1)(n-1)}{n+N-1}} \ . \tag{3.33}$$

W obu przypadkach β_0 oznacza stałą. Metryki będą prostsze w zapisie, jeżeli dokonamy zamiany zmiennych

$$r = s^{\frac{N-1}{n+N-1}}. \tag{3.34}$$

Dla $N = 2$ można znowu skorzystać z postaci (3.17) meryki $\gamma e^{P\tau}$ i, po odpowiednim przeskalowaniu u, v oraz h, z (3.27) i (3.28) otrzymujemy następującą postać metryki próżniowej

$$g = -du\left(dv - r^{1-n}h(u)du\right) + dr^2 + r^2 s_{AB}dx^A dx^B \ . \tag{3.35}$$

Metryka ta należy do uogólnionej do wielu wymiarów klasy Kundta [2, 5]. Dla $r \longrightarrow \infty$ dąży ona do (n+3)-wymiarowej metryki Minkowskiego.

Dla (3.30)-(3.31) metryka próżniowa ma postać

$$g = -du\left(\frac{4r^2dv}{(n+1)(1-uv)^2} - r^{1-n}h(u)du\right) + dr^2 + \frac{n-1}{n+1}r^2 s_{AB}dx^A dx^B \qquad (3.36)$$

i również należy do uogólnionej klasy Kundta. Metryka ta jest osobliwa w $r=0$ i dla $uv=1$. Jeżeli dokonamy następującej zamiany wspólrzędnych

$$u' = u^{-1} \ , \qquad (3.37)$$

$$v' = -\frac{2ur^2}{(n+1)(1-uv)} \ , \qquad (3.38)$$

metryka przyjmuje postać

$$g = -du'\left(2dv' - \frac{4v'}{r}dr - \left((n+1)\frac{v'^2}{r^2} + r^{1-n}h'(u')\right)\right) + dr^2 + \frac{n-1}{n+1}r^2 s_{AB}dx^A dx^B \ . \qquad (3.39)$$

Osobliwość $uv=1$ jest więc osobliwością układu współrzędnych.

W przypadku rozwiązania (3.27)-(3.28) mamy $\lambda = 0$, można więc skonstruować metryki próżniowe dla $N > 2$ korzystając z (3.1), jeżeli zapewnimy spełnienie warunku $c = 0$. Przy γ i P spełniających odpowiednie warunki metryki te są postaci

$$g = (\gamma e^{Pr^{1-n}})_{ij}dx^i dx^j - dr^2 - r^2 s_{AB}dx^A dx^B \ . \qquad (3.40)$$

Dla $N = 3$ spełnienie warunku $c = 0$ możliwe jest w przypadku (3.11), jeżeli $a = \pm\sqrt{3}b$. Otrzymujemy następującą (n+4)-wymiarową metrykę

$$g = e^{br^{1-n}}\cos(\sqrt{3}br^{1-n})(-dt^2 + dx^2) + 2e^{br^{1-n}}\sin(\sqrt{3}br^{1-n})dtdx - e^{-2br^{1-n}}dy^2 + \\ + dr^2 + r^2 s_{AB}dx^A dx^B \ . \qquad (3.41)$$

3.3 Uogólnione metryki Grossa-Perry'ego

W tym paragrafie przyjmiemy $\lambda = 0$, więc i $\hat{R} = 0$, oraz $n > 1$. Będziemy szukać rozwiązań równań (2.28) oraz (2.54) uogólniających funkcje odpowadające rozwiązaniu Grossa-Perry'ego [13]. W tym celu założymy najpierw, że s jest funkcją nowej współrzędnej r. Równania (2.28), (2.54) na funkcje β oraz ϕ są teraz równaniami na trzy funkcje współrzędnej r i przyjmują następującą postać

$$\left(\frac{\beta\phi'}{\alpha}\right)' = \alpha\beta V_{,\phi} \ , \qquad (3.42)$$

$$(1-\frac{1}{N})\frac{\beta'^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^2\phi'^2}{\alpha^2}+2\beta^2V=2c\ , \tag{3.43}$$

gdzie pochodne są liczone względem współrzędnej r, a funkcja α jest zadana jako

$$\alpha = s'\ . \tag{3.44}$$

Na podstawie (2.50) i (3.44) $\tau(r)$ musi spełniać równanie

$$\tau' = \frac{2\alpha}{\beta}\ . \tag{3.45}$$

Metryka (2.61) we współrzędnych $\{r, x^i\}$ przyjmuje następującą postać

$$\widetilde{g} = \alpha^2 dr^2 + \beta^{2/N}(\gamma e^{P\tau})_{ij}dx^i dx^j\ . \tag{3.46}$$

W przypadku $N = n = 2$ z metryki Grossa-Perry'ego w postaci (1.2) można otrzymać następujące funkcje α, β i ϕ spełniające równania (3.42) i (3.43)

$$\alpha = r^{-4}\,(r-m)^{\frac{3}{a}(a-b-1)}\,(r+m)^{\frac{3}{a}(a+b+1)}\ , \tag{3.47}$$

$$\beta = r^{-4}\,(r-m)^{\frac{3}{a}(a-b-1)+1}\,(r+m)^{\frac{3}{a}(a+b+1)+1}\ , \tag{3.48}$$

$$e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\phi} = r\alpha\ . \tag{3.49}$$

Dla dowolnego N i n będziemy szukać rozwiązania równań (3.42) i (3.43) zakładając podobną strukturę funkcji. Jeżeli przyjmie się funkcje α, β oraz e^{ϕ} w postaci $f(r) = f_0 r^{p_1}(r-r_0)^{p_2}(r+r_0)^{p_3}$, można pokazać, że spełniają one równania (3.42) i (3.43) jeżeli są zadane poprzez poniższe zależności

$$\alpha = \alpha_0|r|^{-l-1}|r-r_0|^{l-p}|r+r_0|^{l+p} \tag{3.50}$$

$$\beta = \beta_0(r^2-r_0^2)\alpha \tag{3.51}$$

$$e^{\sqrt{\frac{n+N-1}{n(N-1)}}\phi} = (n-1)|r\alpha|\ , \tag{3.52}$$

gdzie l jest stałą związaną z liczbą wymiarów w następujący sposób

$$l = \frac{n+N-1}{(n-1)(N-1)}\ , \tag{3.53}$$

natomiast stałe β_0, $r_0 \neq 0$, p są powiązane ze stałą c następującą relacją

$$c = 2\beta_0^2 r_0^2\left[\frac{n}{n-1} - p^2\frac{(n-1)(N-1)^2}{N(n+N-1)}\right]\ . \tag{3.54}$$

Całkując równanie (3.45), z uwzględnienieniem (3.50) i (3.51), otrzymujemy

$$\tau = \frac{1}{\beta_0 r_0} \ln \left| \frac{r + r_0}{r - r_0} \right| + \tau_0 \ . \tag{3.55}$$

Ze względu na pewną swobodę transformacji współrzędnej r oraz wielkości P i γ można przyjąć $r_0 > 0$ oraz ustalić dla wygody część stałych,

$$|\alpha_0| = \frac{1}{n-1} \ , \quad \beta_0 = 1 \ , \quad \tau_0 = 0 \ . \tag{3.56}$$

Po tym wyborze zostają dwa parametry rozwiązania p i $r_0 > 0$ oraz stała c, związane zależnością

$$c = 2r_0^2 \left[\frac{n}{n-1} - p^2 \frac{(n-1)(N-1)^2}{N(n+N-1)} \right] \ . \tag{3.57}$$

Mając rozwiązanie (3.50)-(3.55) można na podstawie wyników z paragrafu (3.1) oraz konstrukcji z rozdziału 2, podsumowanej w 2.3, wypisać metryki spełniające równania Einsteina.

Rozważmy przypadek $N = 2$. Zależności (3.53) i (3.54) upraszczają się teraz do postaci

$$l = \frac{n+1}{n-1} \tag{3.58}$$

$$c = 2\beta_0^2 r_0^2 \left[\frac{n}{n-1} - p^2 \frac{(n-1)}{2(n+1)} \right] \ . \tag{3.59}$$

Ponieważ przyjeliśmy $\lambda = 0$, mamy, w zależności od stałej c, metrykę $\gamma e^{P\tau}$ w postaci (3.3) lub (3.5) dla $c \neq 0$ albo (3.17) (z $\lambda = 0$) dla $c = 0$.

3.3.1 Przypadek N=2, c>0

Dla $c > 0$ korzystamy z postaci (3.3) metryki $\gamma e^{P\tau}$. Na podstawie (3.46) mamy

$$\widetilde{g} = \alpha^2 dr^2 + \beta \left(-e^{\pm \tau \sqrt{c}} dt^2 + e^{\mp \tau \sqrt{c}} dy^2 \right) \ . \tag{3.60}$$

Podstawiając α, β i τ w postaci (3.50), (3.51) i (3.55) do (3.60), otrzymujemy

$$\widetilde{g} = |r|^{-l-1} \left(r^2 - r_0^2 \right)^{l+1} \left(- \left| \frac{r - r_0}{r + r_0} \right|^{-p-q} dt^2 + \left| \frac{r - r_0}{r + r_0} \right|^{-p+q} dy^2 \right) + \\ + \frac{1}{(n-1)^2} |r|^{-2l-21} \left(r^2 - r_0^2 \right)^{2l} dr^2 \ , \tag{3.61}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$q = \pm\frac{\sqrt{|c|}}{r_0} \ . \tag{3.62}$$

Metryka (3.61) spełnia równania Einsteina z polem skalarnym (2.18) i (2.19), gdzie potencjał pola skalarnego, dzięki (2.20) i (3.52), jest postaci

$$V = -\frac{1}{2}n(n-1)|r|^{2l}|r-r_0|^{-2l+2p}|r+r_0|^{-2l-2p} \ . \tag{3.63}$$

Po podstawieniu (3.52) i (3.61) do (2.62) otrzymamy (n+3)-wymiarową metrykę próżniową. Dla uproszczenia zapisu można przeskalować niektóre współrzędne otrzymując

$$\begin{aligned} g = &-\left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{p'-q} dt^2 + \left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{p'+q} dy^2 + \\ &+\frac{|r+r_0|^{\frac{2p'+2}{n-1}}}{|r|^{\frac{2n}{n-1}}|r-r_0|^{\frac{2p'-2}{n-1}}}\left(\frac{dr^2}{(n-1)^2} + r^2 d\Omega_n^2\right) \ . \end{aligned} \tag{3.64}$$

Występujący tu parametr p' powiązany jest z p relacją

$$p' = \frac{n-1}{n+1}p \ . \tag{3.65}$$

Relacja (3.59) przepisana przy użyciu parametrów p' i q ma postać

$$(n+1)p'^2 + (n-1)q^2 = 2n \ . \tag{3.66}$$

W przypadku $n = 2$ otrzymujemy z (3.64) 5-wymiarową metrykę, która jest dokładnie metryką Grossa-Perry'ego (1.2), przy czym parametry powiązane są następującymi zależnościami

$$r_0 = m, \quad p' = \frac{1}{a}(b+1), \quad q = \frac{1}{a}(b-1) \ . \tag{3.67}$$

Zauważmy, że relacja (3.66) między parametrami q i p' odpowiada relacji (1.3) między parametrami a i b.

Symetrie

Poza symetrią SO(n+1), metryka (3.64) ma dwa wektory Killinga. Wektor ∂_t jest czasowy, a ∂_x jest przestrzenny. Ponadto metryka jest statyczna.

Zachowanie w nieskończoności

Dla $r \longrightarrow \infty$ metryka (3.64) przybiera następującą postać

$$g = -dt^2 + dy^2 + r^{-2\frac{n-2}{n-1}} \left(\frac{dr^2}{(n-1)^2} + r^2 d\Omega_n^2 \right) . \tag{3.68}$$

Jeżeli dokonamy zmiany zmiennych $r' = r^{\frac{1}{n-1}}$ (3.68) przyjmie postać $(n+3)$-wymiarowej metryki Minkowskiego. Metryka (3.64) jest więc asymptotycznie płaska na powierzchniach $y = const.$

Osobliwości

Metryka (3.64) ma osobliwości w $r = \pm r_0$ i $r = 0$. W pobliżu $r = 0$ mamy następującą asymptotyczną postać metryki

$$g = -dt^2 + dy^2 + r^{-\frac{2n}{n-1}} \left(\frac{dr^2}{(n-1)^2} + r^2 d\Omega_n^2 \right) . \tag{3.69}$$

Jeżeli teraz dokonamy w (3.69) zamiany zmiennych $r' = r^{-\frac{1}{n-1}}$ otrzymamy w jawnej postaci metrykę płaską. Stąd wniosek, że osobliwość $r = 0$ jest osobliwością układu współrzędnych. Inny charakter mają osobliwości $r = \pm r_0$, o czym świadczy postać niezmiennika Kretschmanna, wyliczona dla metryki (3.64) przy użyciu wzoru zamieszczonego w Dodatku 1

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\delta\sigma}R^{\mu\nu\delta\sigma} = {} & 16n(n-1)r_0^2 \, |r|^{\frac{2(n+1)}{n-1}} \, |r - r_0|^{-\frac{4(n-p')}{n-1}} \, |r + r_0|^{-\frac{4(n+p')}{n-1}} \left((n^2 + n - 2p'^2) r^4 + \right. \\ & + 2p'(n(n+1)(p'^2 - 3) + 2(1 + p'^2)) r^3 r_0 + \\ & - (4 - 3n - 5n^2 - 2(-2 + n(n+3))p'^2 + (4 + n(n+3))p'^4) r^2 r_0^2 + \\ & \left. + 2p'(n(n+1)(p'^2 - 3) + 2(1 + p'^2)) r r_0^3 + (n^2 + n - 2p'^2) r_0^4 \right) . \end{aligned} \tag{3.70}$$

Aby zbadać zachowanie (3.70) dla $r = \pm r_0$ musimy określić znak wykładnika dla $|r - r_0|$ i $|r + r_0|$. Korzystając z zależności (3.66) można pokazać, że warunek $n - |p'| > 0$ jest równoważny $q^2 > -n(n+2)$, a więc oba wykładniki są ujemne, czyli $R_{\mu\nu\delta\sigma}R^{\mu\nu\delta\sigma} \longrightarrow \infty$ dla $r \longrightarrow \pm r_0$. Pokazaliśmy więc, że istnieje skalar osobliwy w $r = \pm r_0$, czyli $\pm r_0$ są osobliwościami istotnymi i nie mogą być usunięte poprzez zamianę współrzędnych.

Typ algebraiczny

W celu wyznaczenia typu algebraicznego metryki (3.64) będziemy poszukiwać takiej bazy zerowej, aby spełniony był najmocniejszy z warunków (1.25)-(1.28). Na początek wybierzmy bazę postaci

$$\hat{n} = -\frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}D_1 dy \ , \tag{3.71}$$

$$\hat{l} = A_1 dt + A_1 D_1 dy \ , \tag{3.72}$$

$$\hat{m} = B dr \ , \tag{3.73}$$

gdzie

$$A_1 = \left|\frac{r - r_0}{r + r_0}\right|^{p'-q} \ , \tag{3.74}$$

$$D_1 = \left|\frac{r - r_0}{r + r_0}\right|^{q} \ , \tag{3.75}$$

$$B = \frac{|r + r_0|^{\frac{p'+1}{n-1}}}{(n-1)|r|^{\frac{n}{n-1}}|r - r_0|^{\frac{p'-1}{n-1}}} \ . \tag{3.76}$$

Pozostałych $(n-1)$ form bazowych, związanych z częścią metryki proporcjonalną do $d\Omega_n^2$, nie uwzględniamy, ponieważ nie mają one znaczenia w dalszych rachunkach. Poszukując odpowiedniej bazy będziemy wykorzystywać transformacje Lorentza zachowujące jeden z kierunków zerowych [6]. Przyjmijmy

$$\widetilde{n} = \hat{n} \ , \tag{3.77}$$

$$\widetilde{l} = \hat{l} - \frac{1}{2}F^2\hat{n} + F\hat{m} \ , \tag{3.78}$$

$$\widetilde{m} = \hat{m} - F\hat{n} \ , \tag{3.79}$$

gdzie F jest pewną funkcją współrzędnych. Można pokazać, że warunek (1.25) jest spełniony, jeżeli funkcja F spełnia równanie

$$F^4 - 8F^2\left(\frac{p'}{q} + \frac{2q(n-1)rr_0}{n(r^2 + r_0^2 - 2p'rr_0)}\right)A_1 - 16A_1^2 = 0 \ . \tag{3.80}$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie dla wszystkich wartości parametrów. W ogólności nie da się jednak spełnić (1.26). Ponadto dokonując obrotu wokół $\hat{l}$

$$\widetilde{n} = \hat{n} - \frac{1}{2}\widetilde{F}^2\hat{l} + \widetilde{F}\hat{m} \ , \tag{3.81}$$

$$\widetilde{l} = \hat{l} \ , \tag{3.82}$$

$$\widetilde{m} = \hat{m} - \widetilde{F}\hat{l} \ , \tag{3.83}$$

można pokazać, że nie ma możliwości spełnienia $C_{1i1j} = 0$. Metryka (3.86) jest więc typu I. Dla $n = 2$ wniosek ten jest zgodny z wynikiem otrzymanym dla metryki Grossa-Perry'ego przez Coley'a i Pelavasa [6]

3.3.2 Przypadek N=2, c<0

Korzystając z postaci (3.5) metryki $\gamma e^{P\tau}$ i z (2.61) otrzymujemy

$$\tilde{g} = \alpha^2 dr^2 + \beta \left[\cos(\tau\sqrt{|c|})(-dt^2 + dy^2) \pm 2\sin(\tau\sqrt{|c|}) dtdy \right] \ , \tag{3.84}$$

a po podstawieniu (3.50), (3.51) i (3.55) mamy

$$\begin{aligned} \widetilde{g} = |r|^{-l-1} \left(r^2 - r_0^2\right)^{l+1} \left|\frac{r - r_0}{r + r_0}\right|^{-p} \left[\cos\left(q \ln\left|\frac{r + r_0}{r - r_0}\right|\right)(dt^2 - dy^2) + \right. \\ \left. + 2\sin\left(q \ln\left|\frac{r + r_0}{r - r_0}\right|\right) dtdy \right] + \frac{1}{(n-1)^2} |r|^{-2l-21} \left(r^2 - r_0^2\right)^{2l} dr^2 \ . \end{aligned} \tag{3.85}$$

Ta 3-wymiarowa metryka spełnia równania (2.18) i (2.19) z potencjałem postaci (3.63). Metryka próżniowa, na podstawie (3.52), (3.85) i (2.62) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} g = \left|\frac{r - r_0}{r + r_0}\right|^{p'} \left[\cos\left(q \ln\left|\frac{r + r_0}{r - r_0}\right|\right)(-dt^2 + dy^2) + 2\sin\left(q \ln\left|\frac{r + r_0}{r - r_0}\right|\right) dtdy \right] + \\ + \frac{|r + r_0|^{\frac{2p'+2}{n-1}}}{|r|^{\frac{2n}{n-1}} |r - r_0|^{\frac{2p'-2}{n-1}}} \left(\frac{dr^2}{(n-1)^2} + r^2 d\Omega_n^2\right) \ , \end{aligned} \tag{3.86}$$

gdzie p' i q są zdefiniowane jak w przypadku $c > 0$ przez równania (3.62) i (3.65), a zależność (3.59) ma teraz poniższą formę

$$(n+1)p'^2 - (n-1)q^2 = 2n \ . \tag{3.87}$$

Symetrie

Metryka ta również posiada dwa dodatkowe wektory Killinaga, jeden czasowy i jeden przestrzenny. W tym przypadku jednak, interpretacja ∂_t i ∂_x może się zmieniać w zależności od wartości współrzędnej r. Metryka ta jest stacjonarna, ale nie statyczna, ponieważ występuje niemożliwy do usunięcia poprzez zamianę współrzędnych czynnik $dtdy$.

Zachowanie w nieskończoności

Metryka (3.86) ma taką samą granicę dla $r \longrightarrow \infty$ jak metryka (3.64). Słuszny jest więc znów wniosek, że metryka jest asymptotycznie płaska na powierzchniach $y = const$.

Osobliwości

Podobnie jak w przypadku metryki (3.64) mamy osobliwości w $r = \pm r_0$ oraz $r = 0$ i podobnie, zachowanie w pobliżu $r = 0$ opisane jest przez (3.69). Ponownie $r = 0$ jest osobliwością układu współrzędnych. Niezmiennik Kretschmanna dla metryki (3.86) ma postać (3.70), ale parametry p' i q są teraz powiązane zależnością (3.87) i określenie znaku wykładników $|r - r_0|$ i $|r + r_0|$ nie jest w tym przypadku jednoznaczne. Otrzymujemy, że $r = r_0$ jest na pewno osobliwością istotną dla $p' < n$, natomiast $r = -r_0$ jest taką osobliwością dla $p' > -n$.

Typ algebraiczny

W przypadku metryki (3.86) można przyjąć bazę zerową w postaci

$$\hat{n} = -\frac{1}{2}dt + \frac{1}{2D_2}dy \ , \tag{3.88}$$

$$\hat{l} = A_2 dt + A_2 D_2 dy \ , \tag{3.89}$$

$$\hat{m} = B dr \ , \tag{3.90}$$

gdzie

$$A_2 = \left|\frac{r - r_0}{r + r_0}\right|^p \cos\left(q \ln\left|\frac{r + r_0}{r - r_0}\right|\right) \ , \tag{3.91}$$

$$D_2 = -\frac{\sin\left(q \ln|\frac{r+r_0}{r-r_0}|\right) + 1}{\cos\left(q \ln|\frac{r+r_0}{r-r_0}|\right)} \ , \tag{3.92}$$

natomiast B jest zadane, jak poprzednio, przez (3.76). Dalsze rozumowanie przebiega analogicznie jak w przypadku metryki (3.64) i otrzymujemy analogiczny wniosek, że metryka (3.86) jest typu I. Kierunek zerowy, dla którego spełnione jest (1.25) zadany jest przez (3.78) z $\hat{n}$ i $\hat{l}$ postaci (3.88), (3.89) oraz funkcją F będącą rozwiązaniem równania

$$F^4 - 8F^2\left(\frac{p'}{q} + \frac{2q(n-1)rr_0}{n(r^2 + r_0^2 - 2p'rr_0)}\right)A - 16A^2 = 0 \ , \tag{3.93}$$

gdzie

$$A = \left|\frac{r - r_0}{r + r_0}\right|^{-p'}\left(\sin\left(q \ln\left|\frac{r + r_0}{r - r_0}\right|\right) + 1\right) \ . \tag{3.94}$$

3.3.3 Przypadek N=2, c=0

Dla $c = 0$ otrzymujemy z zależności (3.59), że parametr p jest następująco związany z wymiarem n

$$p = \pm\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{n-1} \tag{3.95}$$

Do konstrukcji możemy w tym przypadku użyć metrykę $\gamma e^{P\tau}$ w postaci (3.17) z $\lambda = 0$, co daje mtrykę $\widetilde{g}$ postaci

$$\widetilde{g} = \alpha^2 dr^2 + \beta\left(-dudv + \tau h(u)du^2\right) \ . \tag{3.96}$$

Podstawiając (3.50), (3.51) i (3.55) otrzymujemy następującą metrykę, spełniającą równania (2.18) i (2.19) z potencjałem (3.63)

$$\begin{aligned}\widetilde{g} = &|r|^{-l-1}\left(r^2 - r_0^2\right)^{l+1}\left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{-p}\left(-dudv + \ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|h(u)du^2\right) + \\ &+\frac{1}{(n-1)^2}|r|^{-2l-21}\left(r^2 - r_0^2\right)^{2l} dr^2 \ .\end{aligned} \tag{3.97}$$

Wynikająca z (3.52), (3.97) i (2.62) metryka próżniowa jest następująca

$$\begin{aligned} g = &\left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{\pm\sqrt{\frac{2n}{n+1}}}\left(-dudv + \ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|h(u)du^2\right) \\ &-\frac{|r+r_0|^{\frac{2}{n-1}\left(\pm\sqrt{\frac{2n}{n+1}}+1\right)}}{|r|^{\frac{2n}{n-1}}|r-r_0|^{\frac{2}{n-1}\left(\pm\sqrt{\frac{2n}{n+1}}-1\right)}}\left(\frac{dr^2}{(n-1)^2} + r^2 d\Omega_n^2\right) \ .\end{aligned} \tag{3.98}$$

Metryka ta należy do uogólnionej klasy Kundta [2].

W szczególnym przypadku $n = 2$ i $h(u) = 0$, po zamianie zmiennych

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right| \ , \ u = t - x \ , \ v = t + x \ , \tag{3.99}$$

i przeskalowaniu parametru

$$M = \frac{\sqrt{3}}{2}r_0 \ , \tag{3.100}$$

(3.98) przyjmuje postać metryki (1.13) znalezionej przez Millwarda [24].

Symetrie

Metryka posiada zerowy wektor Killiga ∂_v.

Zachowanie w nieskończoności

Przy $r \longrightarrow \infty$ metryka dąży do metryki płaskiej w postaci

$$g = -dudv + r^{-2\frac{n-2}{n-1}} \left(\frac{dr^2}{(n-1)^2} + r^2 d\Omega_n^2 \right) \; , \tag{3.101}$$

więc metryka na cięciach $u - v = 0$ jest asymptotycznie płaska.

Osobliwości

Tak jak w przypadku poprzednich metryk mamy trzy osobliwości: $r = \pm r_0$ i $r = 0$. Osobliwość $r = 0$ jest znowu pozorna, ponieważ metryka (3.98) ma tą samą asymptotykę dla $r \longrightarrow 0$ co metryki (3.64) i (3.86). Niezmiennik Kretschmanna ma w tym przypadku postać (3.70) z $p' = \pm\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$. Wynika z niej, że $R_{\mu\nu\delta\sigma}R^{\mu\nu\delta\sigma} \longrightarrow \infty$ dla $r \longrightarrow \pm r_0$, więc osobliwości $r = \pm r_0$ są istotne.

Typ algebraiczny

Przyjmując bazę zerową postaci

$$\hat{n} = \left| \frac{r + r_0}{r - r_0} \right|^{\pm\sqrt{\frac{2n}{n+1}}} du \tag{3.102}$$

$$\hat{l} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r - r_0}{r + r_0} \right| du + dv \; , \tag{3.103}$$

$$\hat{m} = B dr \; , \tag{3.104}$$

gdzie B jest zadane przez (3.76) i (3.95), można pokazać, że w ogólności metryka (3.98) jest typu II_i z wektorami zerowymi zadanymi przez (3.102) i (3.78) z funkcją F zdefiniowaną przez

$$F^2 = \left(\mp\sqrt{\frac{n+1}{2n}} + \frac{2(n^2-1) r r_0}{n(n+1)(r^2 + r_0^2) \mp \sqrt{2n(n+1)} r r_0} \right) h(u) \left| \frac{r + r_0}{r - r_0} \right|^{\mp\sqrt{\frac{2n}{n+1}}} . \tag{3.105}$$

W szczególnym przypadku $h(u) = 0$, a więc m.in. dla metryki Millwarda, metryka jest typu D.

3.3.4 Interpretacja wyników w ramach teorii Kaluzy-Kleina

Gross i Perry rozważali metrykę (3.64) dla $n = 2$ w ramach teorii Kaluzy-Kleina [13]. Metryka ta jest asymptotycznie płaska na cięciach $y = const$. Naturalnym jest więc wybranie efektywnej czterowymiarowej metryki jako

$$g^{(4)} = -\left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{p'-q} dt^2 + \frac{|r+r_0|^{2p'+2}}{|r|^4|r-r_0|^{2p'-2}}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2\right) \; . \tag{3.106}$$

W wyniku redukcji otrzymujemy również pole skalarne następującej postaci

$$\phi = \left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{p'+q} \; . \tag{3.107}$$

Postępując podobnie dla metryki (3.86) otrzymujemy następującą asymptotycznie płaską metrykę czterowymiarową

$$\begin{aligned} g^{(4)} = -\left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{p'} \left(\cos\left(q\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|\right)\right)^{-1} dt^2 + \\ + \frac{|r+r_0|^{2p'+2}}{|r|^4|r-r_0|^{2p'-2}}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2\right) \; , \end{aligned} \tag{3.108}$$

oraz pole skalarne i elektromagnetyczne postaci

$$\Phi = \left|\frac{r-r_0}{r+r_0}\right|^{p'} \cos\left(q\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|\right) \tag{3.109}$$

$$\overline{A} = \tan\left(q\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|\right) dt \; . \tag{3.110}$$

3.3.5 Przypadek $N > 2$

Paragrafy 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 zawierają opis metryk otrzymanych przy założeniu $N = 2$. W niniejszym paragrafie omówione zostaną pokrótce możliwości jakie daje porzucenie tego warunku.

Funkcje (3.50)-(3.55) można połączyć z rozwiązaniem warunków (3.1) na P i γ dla $N = 3$. W przypadku $N = 3$ mamy

$$l = \frac{n+2}{2(n-1)} \; , \tag{3.111}$$

oraz

$$c = 2r_0^2\left[\frac{n}{n-1} - p^2\frac{4(n-1)}{3(n+2)}\right] \; . \tag{3.112}$$

Korzystając z (3.9), (3.11) i (3.13) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\widetilde{g} &= |r|^{-\frac{n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{n}{n-1}}\left(-\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p+\frac{a}{r_0}}dt^2+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p+\frac{b}{r_0}}dy^2+\right.\\ &\left.+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p-\frac{a+b}{r_0}}dx^2\right)+\frac{1}{(n-1)^2}|r|^{-\frac{3n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{n+2}{n-1}}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{2p}dr^2\end{aligned} \tag{3.113}$$

gdzie $c=a^2+b^2+ab$,

$$\begin{aligned}\widetilde{g} = |r|^{-\frac{n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{n}{n-1}}&\left(\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p+\frac{b}{r_0}}\cos\left(\frac{a}{r_0}\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|\right)\left(-dt^2+dy^2\right)+\right.\\ &\left.+2\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p+\frac{b}{r_0}}\sin\left(\frac{a}{r_0}\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|\right)dtdy+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p-\frac{2b}{r_0}}dx^2\right)+\\ &+\frac{1}{(n-1)^2}|r|^{-\frac{3n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{n+2}{n-1}}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{2p}dr^2\ ,\end{aligned} \tag{3.114}$$

gdzie $c=-a^2+3b^2$ oraz

$$\begin{aligned}\widetilde{g} = |r|^{-\frac{n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{n}{n-1}}&\left(-\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p+\frac{b}{r_0}}dudv+\frac{a}{r_0}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p}\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|du^2+\right.\\ &\left.+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{2}{3}p-\frac{2b}{r_0}}dx^2\right)+\frac{1}{(n-1)^2}|r|^{-\frac{3n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{n+2}{n-1}}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{2p}dr^2\ ,\end{aligned} \tag{3.115}$$

gdzie $c=3b^2$. Są to 4-wymiarowe metryki, spełniające równania Einsteina z polem skalarnym i potencjałem

$$V=-\frac{1}{2}n(n-1)|r|^{\frac{n+2}{n-1}}|r-r_0|^{-\frac{n+2}{n-1}+2p}|r+r_0|^{-\frac{n+2}{n-1}-2p}\ . \tag{3.116}$$

Dalej, na podstawie (2.62), (2.20) i (3.116) otrzymujemy następujące (4+n)-wymiarowe metryki próżniowe odpowiadające kolejno wyrażeniom (3.113), (3.114) oraz (3.115)

$$\begin{aligned}g = &-\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p+\frac{a}{r_0}}dt^2+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p+\frac{b}{r_0}}dy^2+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p-\frac{a+b}{r_0}}dx^2+\\ &+|r|^{-\frac{2n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{2}{n-1}}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{4p}{n+2}}\left(\frac{dr^2}{(n-1)^2}+r^2d\Omega_n^2\right)\ ,\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$g = \left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p+\frac{b}{r_0}}\cos\left(\frac{a}{r_0}\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|\right)\left(-dt^2+dy^2\right)+$$

$$+2\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p+\frac{b}{r_0}}\sin\left(\frac{a}{r_0}\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|\right)dtdy+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p-\frac{2b}{r_0}}dx^2+$$

$$+|r|^{-\frac{2n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{2}{n-1}}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{4p}{n+2}}\left(\frac{dr^2}{(n-1)^2}+r^2d\Omega_n^2\right)\ , \qquad (3.118)$$

$$g=-\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p+\frac{b}{r_0}}dudv+\frac{a}{r_0}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p}\ln\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|du^2+$$

$$+\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{-\frac{4(n-1)}{3(n+2)}p-\frac{2b}{r_0}}dx^2+$$

$$+|r|^{-\frac{2n}{n-1}}\left(r^2-r_0^2\right)^{\frac{2}{n-1}}\left|\frac{r+r_0}{r-r_0}\right|^{\frac{4p}{n+2}}\left(\frac{dr^2}{(n-1)^2}+r^2d\Omega_n^2\right)\ . \qquad (3.119)$$

Metryki (3.117), (3.118) i (3.119) ze względu na tę samą strukturę co (3.64), (3.86) i (3.98) mają podobne do nich własności zarówno jeśli chodzi o osobliwości, jak i asymptotykę. W tym przypadku o asymptotycznej płaskości możemy mówić dla cięć $y = const$, $x = const$. Ponadto dla wszystkich metryk mamy dodatkowy przestrzenny wektor Killinga ∂_x.

Metryki (3.117), (3.118), (3.119) zostały uzyskane przy założeniu, że $N = 3$. Innego typu metryki można uzyskać biorąc dla dowolnego N

$$\gamma e^{P\tau}=dudv+\tau h(u)du^2+\sum_{a=1}^{N-2}e^{c_a\tau}dy_a^2\ , \qquad (3.120)$$

gdzie c_a są stałymi spełniającymi relację

$$\sum_{a=1}^{N-2}c_a=0\ , \qquad (3.121)$$

a stała c jest w następujący sposób powiązana ze stałymi c_a

$$c=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N-2}c_a^2\ . \qquad (3.122)$$

Przy pomocy (3.120) można otrzymać metryki uogólniające (3.98)

Rozdział 4

Transformacje symetrii metryk Grossa-Perry'ego

Dla 4-wymiarowych, próżniowych i stacjonarnych równań Einsteina Ehlers [8] znalazł szczególny rodzaj transformacji symetrii, która pozwala otrzymać nowe stacjonarne rozwiązania. Przy użyciu tej transformacji można np. wyprowadzić metrykę Taub-NUT z rozwiązania Schwarzschilda. Neugebauer i Kramer pokazali [29], że transformacja ta jest częścią grupy symetrii $SL(2,\mathbb{R})$ równań Einsteina dla metryk stacjonarnych, jednak, oprócz transformacji Ehlers'a, pozostałe nie zmieniają geometrii czasoprzestrzeni. Podobny rodzaj ukrytej symetrii występuje dla większej liczby wymiarów. W przypadku równań dla metryk 5-wymiarowych z dwoma komutującymi wektorach Killinga Maison [26] wykazał istnienie symetrii $SL(3,\mathbb{R})$, co więcej zauważył, że wynik ten można uogólnić. Dla metryk (n+4)-wymiarowych z (n+1) komutującymi wektorami Killinga równania mają symetrię $SL(n+2,\mathbb{R})$.

W rozdziale tym omówiona zostanie metoda generowania nowych rozwiązań równań Einsteina z istniejących rozwiązań bazująca na istnieniu ukrytej symetrii $SL(3,\mathbb{R})$ równań Einsteina dla 5-wymiarowych metryk z dwoma komutującymi wektorami Killinga. Podrozdział 4.1 zawiera opis tej metody na podstawie [26].

Podrozdział 4.2 zawiera dyskusję ilości parametrów transformacji istotnych ze względu na generację nowych rozwiązań, zawartą w publikacji [38].

W podrozdziale 4.3 metoda ta zostanie zastosowana do 5-wymiarowych metryk wyliczonych w rozdziale 3 Otrzymamy w ten sposób metryki, które dla szczególnych wartości parametrów można interpretować w ramach teorii Kaluzy-Kleina.

4.1 Metoda generowania nowych rozwiązań dla zredukowanych, próżniowych, 5-wymiarowych równań Einsteina

Rozważmy 5-wymiarową metrykę posiadającą dwa komutujące wektory Killinga. We współrzędnych, dla których wektory Killinga są postaci $\frac{\partial}{\partial x^a}$, $a = 0, 1$ możemy metrykę zapisać następująco

$$g = \lambda_{ab}\left(dx^a + \omega^a{}_i dx^i\right)\left(dx^b + \omega^b{}_j dx^j\right) + \frac{1}{\tau} h_{ij} dx^i dx^j \ , \tag{4.1}$$

gdzie $h = h_{ij}dx^i dx^j$ jest metryką 3-wymiarowej przestrzeni o współrzędnych x^i, $i = 2, 3, 4$, natomiast λ_{ab} i $\omega^a{}_i dx^i$ są odpowiednio funkcjami i jednoformami na tej przestrzeni oraz

$$\tau = -det\lambda_{ab} \ . \tag{4.2}$$

Wprowadźmy następującą symetryczną macierz wymiaru 3x3

$$\chi = \begin{pmatrix} \lambda_{ab} - \frac{1}{\tau}V_a V_b & \frac{1}{\tau}V_a \\ \frac{1}{\tau}V_b & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \ , \tag{4.3}$$

gdzie V_a są skalarami powiązanymi z jednoformami ω_a następującym równaniem

$$dV_a = -\tau\lambda_{ab} * d\omega^b \ , \tag{4.4}$$

gdzie $*$ oznacza dualizację Hodge'a względem metryki h. Całkowalność równań (4.4) jest gwarantowana przez równania Einsteina. Funkcje V_a są określone z dokładnością do stałej. Można je ustalić nakładając warunki brzegowe. Zauważmy, że macierz χ ma następujące własności

$$\chi = \chi^T \ , \tag{4.5}$$

$$\det(\chi) = 1 \ . \tag{4.6}$$

Używając macierzy χ można równania Einsteina dla metryki (4.1) zapisać w następującej postaci.

$$d * \left(\chi^{-1} d\chi\right) = 0 \ , \tag{4.7}$$

$$R^{(3)}_{ij} = \frac{1}{4} Tr\left(\chi^{-1}\partial_i \chi \chi^{-1} \partial_j \chi\right) \ , \tag{4.8}$$

gdzie $R^{(3)}_{ij}$ jest tensorem Ricciego metryki h. Przy tej postaci równań ukryta symetria $SL(3, \mathbb{R})$ staje się widoczna. Zarówno własności macierzy χ (4.5), (4.6), jak i równania (4.7), (4.8) są zachowane przy następującej transformacji

$$\chi \to M^T \chi M, \quad h \to h, \quad M \in SL(3, \mathbb{R}) \ . \tag{4.9}$$

Powyższą własność można wykorzystać do generowania nowych rozwiązań równań Einsteina. Mając daną metrykę w postaci (4.1), jednoznacznie określoną przez parę (χ, h) spełniającą równania (4.7) i (4.8), można przy użyciu pewnej macierzy $M \in SL(3, \mathbb{R})$ dokonać transformacji (4.9). Otrzymana nowa para (χ', h) po rozwiązaniu równania (4.4) definiuje również merykę postaci (4.1) spełniającą równania Einsteina. W ten sposób można np. wyprowadzić rozwiązanie Myersa-Perry'ego z metryki Tangherliniego [12]. Rozwiązania, jakie można otrzymać tą metodą badał również Rasheed [35].

Ogólna transformacja $SL(3, \mathbb{R})$ nie musi zachowywać asymptotyki wyjściowego rozwiązania. Jak pokazali Giusto i Saxena [12] warunkiem koniecznym do tego jest, aby transformacja zachowywała macierz χ postaci

$$\chi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{4.10}$$

a więc należała do podgrupy SO(2,1).

Do rozstrzygnięcia pozostaje również, które z transformacji pozwalają orzymać rozwiązania opisujące czasoprzestrzeń o innej geometrii niż wyjściowa. To zagadnienie zostanie omówione w następnym podrozdziale.

4.2 Parametry transformacji

W ogólności, ze względu na wymiar grupy $SL(3, \mathbb{R})$, mając metrykę w postaci (4.1) możemy za pomocą (4.9) otrzymać nowe rozwiązanie, które ma 8 parametrów. Ilość parametrów można znacznie zmniejszyć ponieważ część z nich odpowiada jedynie za zmianę układu współrzędnych. W celu zidentyfikowania istotnych parametrów zauważmy że macierz $M \in SL(3, \mathbb{R})$ można rozłożyć w następujący sposób

1. Jeżeli ${M^3}_3 \neq 0$ mamy

$$M = NRL , \tag{4.11}$$

gdzie

$$N = \begin{pmatrix} {\delta^a}_b & n_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} {R^a}_b & 0 \\ 0 & \pm (det({R^a}_b)^{-1}) \end{pmatrix} , \quad L = \begin{pmatrix} {\delta^a}_b & 0 \\ l_b & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.12}$$

2. Jeżeli ${M^3}_3 = 0$ oraz ${M^1}_3 \neq 0$ mamy

$$M = N_1 RL , \tag{4.13}$$

gdzie

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 1 & n \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.14}$$

3. Jeżeli $M^3{}_3 = 0$ oraz $M^1{}_3 = 0$ mamy

$$M = N_0 R L \ , \tag{4.15}$$

gdzie

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{4.16}$$

Można pokazać, że macierz R odpowiada transformacji współrzędnych

$$x^a \to R^a{}_b x^b, \tag{4.17}$$

natomiast macierz L odpowiada transformacji

$$V_a \to V_a + l_a \ , \tag{4.18}$$

która również jest bez znaczenia przy poszukiwaniu nowych rozwiązań. Z punktu widzenia generacji nowych rozwiązań istotna jest więc tylko macierz N z dwoma parametrami n_a, macierz N_1 z parametrem n oraz macierz N_0.

4.3 Transformacje metryk Grossa-Perry'ego

4.3.1 Transformacja metryki dla $N = 2$ i $c > 0$

Zastosujemy teraz omówioną w poprzednim paragrafie medodę do metryki (3.64) z $n = 2$ (metryka Grossa-Perry'ego), dla uproszczenia zapisaną w postaci (1.8).Metryka ta posiada czasowy wektor Killinga $\frac{\partial}{\partial t}$ oraz przestrzenne wektory Killinga m.in $\frac{\partial}{\partial \phi}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$. Aby otrzymać ciekawą w interpretacji metrykę i zachować symetrię osiową wybierzemy do konstrukcji następujące komutujące wektory Killinga: $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. Możemy teraz zapisać metrykę (1.8) w postaci (4.1). Otrzymujemy następujące wyrażenia na wielkości λ_{ab}, τ i h

$$\lambda_{ab} = \begin{pmatrix} -A^a & 0 \\ 0 & A^b \end{pmatrix} , \tag{4.19}$$

$$\tau = A^{a+b} \ , \tag{4.20}$$

$$h = d\rho^2 + \rho^2 A d\theta^2 + \rho^2 A \sin^2\theta d\phi^2 \ , \tag{4.21}$$

oraz $V_0 = 0$, $V_1 = 0$. Macierz χ ma więc następującą postać

$$\chi = \begin{pmatrix} -A^a & 0 & 0 \\ 0 & A^b & 0 \\ 0 & 0 & -A^{-a-b} \end{pmatrix} \ . \tag{4.22}$$

Dokonując transformacji (4.9) z $M = N$, gdzie

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n_0 \\ 0 & 1 & n_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \tag{4.23}$$

otrzymujemy

$$\chi' = N^T \chi N = \begin{pmatrix} -A^a & 0 & -n_0 A^{-a-b} \\ 0 & A^b & n_1 A^{-a-b} \\ -n_0 A^{-a-b} & n_1 A^{-a-b} & -A^{-a-b} - n_0^2 A^a + n_1^2 A^b \end{pmatrix} \ . \tag{4.24}$$

Z (4.24) wynika

$$\tau' = \frac{1}{A^{-a-b} + n_0^2 A^a - n_1^2 A^b} \ , \tag{4.25}$$

$$V_0' = \frac{-n_0 A^{-a-b}}{A^{-a-b} + n_0^2 A^a - n_1^2 A^b} \ , \tag{4.26}$$

$$V_1' = \frac{n_1 A^{-a-b}}{A^{-a-b} + n_0^2 A^a - n_1^2 A^b} \ . \tag{4.27}$$

Rozwiązując równanie (4.4) dostajemy

$$\omega_i^0 dx^i = -2Mn_0(2a+b)\cos\theta d\phi = -\widetilde{\omega}_a \cos\theta d\phi \ , \tag{4.28}$$

$$\omega_i^1 dx^i = 2Mn_1(a+2b)\cos\theta d\phi = \widetilde{\omega}_b \cos\theta d\phi \ , \tag{4.29}$$

oraz ostatecznie nową metrykę w postaci

$$\begin{aligned} g = & -\frac{A^a - n_1^2 A^{2(a+b)}}{1 + n_0^2 A^{2a+b} - n_1^2 A^{a+2b}} \left(dt - \widetilde{\omega}_a \cos\theta d\phi\right)^2 + \\ & -\frac{2n_0 n_1 A^{2(a+b)}}{1 + n_0^2 A^{2a+b} - n_1^2 A^{a+2b}} \left(dt - \widetilde{\omega}_a \cos\theta d\phi\right)\left(dy + \widetilde{\omega}_b \cos\theta d\phi\right) + \\ & +\frac{A^b + n_0^2 A^{2(a+b)}}{1 + n_0^2 A^{2a+b} - n_1^2 A^{a+2b}} \left(dy + \widetilde{\omega}_b \cos\theta d\phi\right)^2 + \\ & + \left(A^{-a-b} + n_0^2 A^a - n_1^2 A^b\right)\left(d\rho^2 + \rho^2 A d\Omega^2\right) \ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

W powyższej metryce mamy dwa dodatkowe, w stosunku do metryki wyjściowej parametry: n_0 i n_1. Jeżeli przyjmiemy $n_0 = 0$ otrzymana metryka będzie asymptotycznie płaska na cięciu $y = const$, a interpretując ją w ramach teorii Kaluzy-Kleina otrzymujemy 4-wymiarową metrykę

$$g = -\frac{A^a - n_1^2 A^{2(a+b)}}{1 - n_1^2 A^{a+2b}} dt^2 + \left(A^{-a-b} - n_1^2 A^b\right)\left(d\rho^2 + \rho^2 A d\Omega^2\right) \ , \tag{4.31}$$

oraz pole skalarne i elektromagnetyczne w następującej postaci

$$\Phi = \frac{A^b}{1 - n_1^2 A^{a+2b}} , \tag{4.32}$$

$$\overline{A} = 2Mn_1(a+2b)\cos(\theta)d\phi \ . \tag{4.33}$$

Zastosowanie transformacji pozwoliło więc z rozwiązania, które posiada jedynie pole skalarne otrzymać znacznie ciekawsze rozwiązanie z polem elektromagnetycznym.

Przyjmując $M = N_1$ (4.14) otrzymujemy

$$\chi' = N_1^T \chi N_1 = \begin{pmatrix} -A^{-a-b} & 0 & 0 \\ 0 & A^b & nA^b \\ 0 & nA^b & -A^a + n^2 A^b \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

oraz

$$g = -A^{-a-b}dt^2 + \left(A^b + \frac{n^2 A^{2b}}{A^a - n^2 A^b}\right)(dy - 2Mn(a-b)\cos\theta d\phi)^2 + \\ + \left(A^a - n^2 A^b\right)\left(d\rho^2 + \rho^2 A d\Omega^2\right) \ . \tag{4.35}$$

Dla $M = N_0$ (4.16) mamy

$$\chi' = N_0^T \chi N_0 = \begin{pmatrix} -A^{-a-b} & 0 & 0 \\ 0 & -A^a & 0 \\ 0 & 0 & A^b \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

oraz

$$g = -A^{-a-b}dt^2 + A^b d\rho^2 + \rho^2 A^{1+b} d\Omega^2 - A^a dy^2 \ . \tag{4.37}$$

Powyższa metryka ma własności podobne do rozwiązania pierwotnego. Na uwagę zasługuje fakt, że transformacja spowodowała zmianę sygnatury.

4.3.2 Transformacja metryki dla $N = 2$ i $c < 0$

Rozwiązanie (3.86) w przypadku $n = 2$ również może posłużyć do generacji nowych metryk spełniających równania Einsteina. Wygodnie jest najpierw zapisać metrykę (3.86) w postaci

$$g = A^{\frac{p'}{2}}\left[\cos B\left(-dt^2 + dy^2\right) + 2\sin B dtdy\right] + A^{-p}\left(d\rho^2 + A\rho^2 d\Omega^2\right) \ , \tag{4.38}$$

gdzie A jest funkcją zdefiniowaną przez (1.9) oraz (1.4), ponadto

$$B = q \ln\sqrt{A} \ , \tag{4.39}$$

a parametry p', q powiązane są zależnością (3.87). Przyjmując $\frac{\partial}{\partial t}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ jako dwa komutujące wektory, jak dla metryki (3.64), można wyznaczyć macierz χ,

$$\chi = \begin{pmatrix} -A^{\frac{p'}{2}}\cos B & A^{\frac{p'}{2}}\sin B & 0 \\ A^{\frac{p'}{2}}\sin B & A^{\frac{p'}{2}}\cos B & 0 \\ 0 & 0 & -A^{-p'} \end{pmatrix} \ . \tag{4.40}$$

Dokonując obrotu macierzy χ przy użyciu macierzy (4.23) otrzymujemy

$$\chi' = \begin{pmatrix} -A^{\frac{p'}{2}}\cos B & A^{\frac{p'}{2}}\sin B & A^{\frac{p'}{2}}\left(-n_0\cos B + n_1\sin B\right) \\ A^{\frac{p'}{2}}\sin B & A^{\frac{p'}{2}}\cos B & A^{\frac{p'}{2}}\left(n_0\sin B + n_1\cos B\right) \\ A^{\frac{p'}{2}}\left(-n_0\cos B + n_1\sin B\right) & A^{\frac{p'}{2}}\left(n_0\sin B + n_1\cos B\right) & -\frac{1}{\tau'} \end{pmatrix} , \tag{4.41}$$

gdzie

$$\tau' = -A^{-p'} + A^{\frac{p'}{2}}\left(\left(n_1^2 - n_0^2\right)\cos B + 2n_0 n_1 \sin B\right) \ . \tag{4.42}$$

Z (4.41) można wyznaczyć

$$\omega_i^0 dx^i = M(n_1 q - 3n_0 p)\cos\theta d\phi = \widetilde{\omega}_q \cos\theta d\phi \ , \tag{4.43}$$

$$\omega_i^1 dx^i = -M(3n_1 p + n_0 q)\cos\theta d\phi = \widetilde{\omega}_0 \cos\theta d\phi \ . \tag{4.44}$$

Metrykę, którą można interpretować w ramach teorii Kaluzy-Kleina otrzymamy jeżeli $\widetilde{\omega}_q = 0$, czyli jeżeli zachodzi następująca relacja między parametrami

$$n_0 = \frac{n_1 q}{3p} \ . \tag{4.45}$$

Metryka jest wtedy postaci

$$
\begin{aligned}
g = & \frac{-A^{\frac{p'}{2}}\cos B + n_1^2 A^{2p'}}{1 + A^{\frac{3p'}{2}} n_1^2 \left(\left(\frac{q^2}{9p'^2} - 1\right)\cos B - 2\frac{q}{3p'}\sin B\right)} dt^2 + \\
& +2\frac{A^{\frac{p'}{2}}\sin B - \frac{n_1^2 q}{3p} A^{2p'}}{1 + A^{\frac{3p'}{2}} n_1^2 \left(\left(\frac{q^2}{9p'^2} - 1\right)\cos B - 2\frac{q}{3p'}\sin B\right)} dt\left(dy - 3Mn_1 p\left(1 + \frac{q^2}{9p'^2}\right)\cos\theta d\phi\right) + \\
& +\frac{A^{\frac{p'}{2}}\cos B + \frac{n_1^2 q^2}{9p'^2} A^{2p'}}{1 + A^{\frac{3p'}{2}} n_1^2 \left(\left(\frac{q^2}{9p'^2} - 1\right)\cos B - 2\frac{q}{3p'}\sin B\right)} \left(dy - 3Mn_1 p\left(1 + \frac{q^2}{9p'^2}\right)\cos\theta d\phi\right)^2 + \\
& +A^{-p'}\left(1 + A^{\frac{3p'}{2}} n_1^2 \left(\left(\frac{q^2}{9p'^2} - 1\right)\cos B - 2\frac{q}{3p'}\sin B\right)\right)\left(d\rho^2 + A\rho^2 d\Omega^2\right) \ . \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Przechodząc z powyższej 5 wymiarowej metryki do czterowymiarowej teorii efektywnej, poza polem skalarnym, otrzymujemy pole elektromagnetyczne w następującej postaci

$$
\overline{A} = \frac{A^{\frac{p'}{2}}\sin B - \frac{n_1^2 q}{3p} A^{2p'}}{A^{\frac{p'}{2}}\cos B + n_1^2 A^{2p'}} dt - 3Mn_1 p\left(1 + \frac{q^2}{9p'^2}\right)\cos\theta d\phi \ . \qquad (4.47)
$$

Powyższe wyrażenie można porównać z potencjałem dla metryki sprzed transformacji (3.110). Widać stąd że podobnie jak dla metryki (3.64) zastosowana metoda daje rozwiązania bogatsze ze względu na interpretację w ramach teorii Kaluzy-Kleina.

Podsumowanie

Celem niniejszej pracy było poszukiwanie nowych, fizycznie interesujących rozwiązań równań Einsteina dla wymiarów D>4. W tym celu opracowana została metoda polegająca na dwustopniowej redukcji (N+n+1)-wymiarowych próżniowych równań przy odpowiednich założeniach. Znalezienie metryki o symetrii SO(n+1) w przestrzeni (N+n+1)-wymiarowej zostało sprowadzone do znalezienia N-wymiarowej metryki γ i tensora P, spełniających określone warunki oraz trzech funkcji ϕ, β, τ jednej zmiennej spełniających układ trzech równań różniczkowych. Wszystkie potrzebne do rozwiązania równania wyszczególnione zostały w paragrafie 2.2.1.

W paragrafie 3.1 znaleziona została ogólna postać metryki γ i tensora P dla $N = 2$ oraz szczególne ich przykłady dla $N > 2$. Kolejne paragrafy rozdziału 3 poświęcone zostały rozwiązaniu równań na funkcje ϕ, β i τ. Doprowadziło to do znalezienia nowych metryk będących rozwiązaniem równań Einsteina, w tym do głównego rezultatu pracy, czyli rodziny metryk (3.64), (3.86) i (3.98) będącej uogólnieniem rozwiązania Grossa-Perry'ego.

Wszystkie metryki w otrzymanej rodzinie są asymptotycznie płaskie na określonych 4-wymiarowych cięciach. Ze względu na to oraz ich symetrie rozwiązania te mogą okazać się interesujące z punktu widzenia efektywnych modeli branowych. Rozważania takie wykraczały jednak poza tematykę niniejszej pracy i wymagają dalszych badań. Wśród znalezionych rozwiązań znajdują się ponadto metryki należące do uogólnionej klasy Kundta (mogą więc opisywać fale grawitacyjne) oraz rozwiązania algebraicznie specjalne.

W rozdziale 4. do niektórych metryk ze znalezionej rodziny rozwiązań zastosowana została transformacja pozwalająca na otrzymanie nowych rozwiązań równań Einsteina. Pozwoliło to na otrzymanie metryk ciekawszych do interpretacji w ramach teorii Kaluzy-Kleina ze względu na bogatszą strukturę otrzymanego pola elektromagnetycznego.

Dodatek A

Mamy daną $N+n+1$-wymiarową metrykę postaci

$$g = g_{AB}dx^A dx^B + e^{2f} s_{ab} dx^a dx^b \ , \tag{A.1}$$

gdzie $s_{ab}dx^a dx^b$ jest metryką n-wymiarowej sfery, $g' = g_{AB}dx^A dx^B$ jest $N+1$-wymiarową metryką o współczynnikach niezależnych od współrzędnych x^a, natomiast f jest funkcją współrzędnych x^A. Oznaczając primem wielkości związane z metryką g' oraz pochodną kowariantną względem g' przez $_{|A}$ mamy:

- Symbole Christoffela

$$\Gamma^A_{bc} = -g^{AB} e^{2f} f_{,B} s_{bc} \ , \tag{A.2}$$
$$\Gamma^a_{Bc} = f_{,B} s^a_c \ , \tag{A.3}$$
$$\Gamma^A_{BC} = \Gamma'^A_{BC} \ , \tag{A.4}$$
$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} s^{ad} \left(s_{dc,b} + s_{bd,c} - s_{bc,d}\right) \tag{A.5}$$

- Tensor Riemanna

$$R_{ABCD} = R'_{ABCD} \tag{A.6}$$
$$R_{ABCd} = 0 \tag{A.7}$$
$$R_{ABcd} = 0 \tag{A.8}$$
$$R_{AbCd} = -e^{2f}\left(f_{|AC} + f_{|A} f_{|C}\right) s_{bd} \tag{A.9}$$
$$R_{Abcd} = 0 \tag{A.10}$$
$$R_{abcd} = e^{2f}\left(1 - e^{2f} f^{|A} f_{|A}\right)\left(s_{ac}s_{bd} - s_{ad}s_{bc}\right) e \tag{A.11}$$

- Tensor Ricciego

$$R_{Ab} = 0 \tag{A.12}$$
$$R_{ab} = \left[n - 1 - e^{2f}\left(\Box' f + n f^{|A} f_{|A}\right)\right] s_{ab} \tag{A.13}$$
$$R_{AB} = R'_{AB} - n f_{|A} f_{|B} - n f_{|AB}, \tag{A.14}$$

- Niezmiennik Kretschmanna

$$R^{\mu\nu\sigma\lambda} R_{\mu\nu\sigma\lambda} = R'^{ABCD} R'_{ABCD} + 4n\left(f_{|AB} + f_{|A} f_{|B}\right)\left(f^{|AB} + f^{|A} f^{|B}\right) \tag{A.15}$$

Dodatek B

Transformacja konforemna.
Niech dwie (N+1)-wymiarowe metryki powiązane będą relacją

$$\widetilde{g}_{AB} = \Omega^2 g'_{AB} \ . \tag{B.1}$$

Pochodną kowariantną względem metryki g' oznaczmy przez $_{|A}$, natomiast względem metryki $\widetilde{g}$ poprzez średnik. Wtedy zachodzi zależność

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{AB} = {} & R'_{AB} - (N-1)(ln\Omega)_{|AB} - g'_{AB} g'^{CD} (ln\Omega)_{|CD} + (N-1)(ln\Omega)_{|A}(ln\Omega)_{|B} \\ & -(N-1) g'_{AB} g'^{CD} (ln\Omega)_{|C} (ln\Omega)_{|D} \ . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Niech f będzie dowolną funkcją, wtedy

$$f_{;AB} = f_{|AB} - f_{|A}(ln\Omega)_{|B} + f_{|B}(ln\Omega)_{|A} - g'_{AB} g'^{CD} f_{|C} (ln\Omega)_{|D} \ . \tag{B.3}$$

Dodatek C

Wyliczenie tensora Einsteina dla metryki postaci

$$\tilde{g} = \epsilon ds^2 + \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j \ , \ \epsilon = \pm 1 \ . \tag{C.1}$$

- Symbole Christoffela

$$\widetilde{\Gamma}^s_{ss} = 0 \tag{C.2}$$

$$\widetilde{\Gamma}^s_{si} = 0 \tag{C.3}$$

$$\widetilde{\Gamma}^s_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon\dot{\tilde{g}}_{ij} \tag{C.4}$$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{ss} = 0 \tag{C.5}$$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{sj} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\dot{\tilde{g}}_{kj} \tag{C.6}$$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{il}\left(\tilde{g}_{lk,j} + \tilde{g}_{jl,k} - \tilde{g}_{jk,l}\right) \tag{C.7}$$

- Tensor Ricciego

$$\widetilde{R}_{ss} = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}\ddot{\tilde{g}}_{kn} - \frac{1}{4}\dot{\tilde{g}}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn} \tag{C.8}$$

$$\widetilde{R}_{si} = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{ni} - \tilde{g}^{ln}\dot{\tilde{g}}_{nl}\delta^k_i\right)_{;k} \tag{C.9}$$

$$\widetilde{R}_{ij} = \hat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon\ddot{\tilde{g}}_{ij} - \frac{1}{4}\epsilon\tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn}\dot{\tilde{g}}_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon\tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{nj}\dot{\tilde{g}}_{ik} \tag{C.10}$$

- Skalar Ricciego

$$\widetilde{R} = \hat{R} - \epsilon\tilde{g}^{ij}\ddot{\tilde{g}}_{ij} - \frac{1}{4}\epsilon\tilde{g}^{ij}\dot{\tilde{g}}_{ij}\tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn} - \frac{1}{4}\epsilon\dot{\tilde{g}}^{ij}\dot{\tilde{g}}_{ij} \tag{C.11}$$

- Tensor Einsteina

$$\widetilde{G}^s{}_s = -\frac{1}{2}\hat{R} + \frac{1}{8}\epsilon\left(\tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn}\right)^2 - \frac{1}{8}\epsilon\dot{\tilde{g}}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn} \tag{C.12}$$

$$\widetilde{G}^s{}_i = \frac{1}{2}\epsilon\left(\tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{ni} - \tilde{g}^{ln}\dot{\tilde{g}}_{nl}\delta^k_i\right)_{;k} \tag{C.13}$$

$$\widetilde{G}^i{}_j = \hat{G}^i{}_j - \frac{1}{2}\epsilon\left(\tilde{g}^{ik}\dot{\tilde{g}}_{kj} - \tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn}\delta^i_j\right)^{\cdot} - \frac{1}{4}\epsilon\tilde{g}^{ik}\dot{\tilde{g}}_{kj}\tilde{g}^{nl}\dot{\tilde{g}}_{nl} + \frac{1}{8}\epsilon\left(\tilde{g}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn}\right)^2\delta^i_j - \frac{1}{8}\dot{\tilde{g}}^{kn}\dot{\tilde{g}}_{kn}\delta^i_j \tag{C.14}$$

Bibliografia

[1] Chamblin A., Hawking S.W., Reall H.S. (2000), *Brane-world black holes*, Phys. Rev. D **61**, 065007-1-6

[2] Coley A. (2008), *Classification of the Weyl tensor in higher dimensions and aplications*, Class. Quantum Grav. **25** 033001

[3] Coley A., Hervik S., Papadopoulos G., Pelavas N. (2009), *Kundt Spacetimes*, Class. Quantum Grav. **26** 105016

[4] Coley A., Hervik S. (2009), *Higher dimensional bivectors and classification of the Weyl operator*, Class. Quantum Grav. **27** 015002

[5] Coley A., Milson R., Pravda V., Pravdova A. (2004) *Classification of the Weyl tensor in higher dimensions* , Class. Quantum Grav. **21**, L35

[6] Coley A., Pelavas N. (2006), *Classification of higher dimensional spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **38** 445-461

[7] Davidson A., Owen D. (1985), *Black holes as windows to extra dimensions*, Phys. Lett. **B 155**, 247

[8] Ehlers J. (1957), *Konstruktionen und Chaarakterisierungen von Lösungen der Einsteinschen Gravitationsfeldgleichungen*, Disertation, Hamburg

[9] Emparan R., Reall H.S. (2002), *A rotating black ring in five dimensions*, Phys. Rev. Lett. **88**, 101101

[10] Emparan R., Reall H.S. (2008), *Black holes in higher dimensions*, Living Rev. Relativity **11**, 6

[11] Gibbons G.W., Ida D., Shiromizu T. (2003), *Uniqueness and non-uniquenessof static vacuum black holes in higher dimensions*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148**, 284

[12] Giusto S., Saxena A. (2007), *Stationary axisymmetric solutins of five dimensional gravity*, Class. Quantum Grav. **24**, 4269

[13] Gross D.J., Perry M.J. (1983), *Magnetic monopoles in Kaluza-Klein theories*, Nucl. Phys. **B 226**, 29

[14] Jakimowicz M., Tafel J. (2008), *SO(n+1) symmetric solutions of the Einstein equations in higher dimensions*, Class. Quantum Grav. **25**, 175002

[15] Jakimowicz M., Tafel J. (2009), *Generalization of the Gross-Perry metrics*, Int. J. Theor. Phys. **48**, 2876-2883

[16] Kaluza T. (1921), *Zum unitatsproblem der physik*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 966

[17] Kasner E. (1921), *Geometrical theorems on Einstein's cosmological equaitons*, Amer. J. Math. **43**, 217

[18] Kerr R.P. (1963), *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metric*, Phys. Rev. Lett **11**, 237

[19] Klein O. (1926), *Quatnum theory and five dimensional theory of relativity*, Z. Physic **37**, 895

[20] Kramer D. (1971), *Axialsymmetrische stationäre lösungen der projektiven feldtheorie* Acta Phys Polon. **B2**, 807

[21] Kramer D., Neugebauer G. (1968), *Algebraisch spezielle Einstein-Räume mit einer Bewegungsgruppe*, Commun. Math. Phys. **7** 173

[22] Lake K. (2006), *Static Ricci-flat 5-manifolds admitting the 2-spere*, Class. Quantum Grav. **23**, 5876

[23] Maartens R., Koyama K. (2010), *Brane-World Gravity*, Living Rev. Relativity **13**, http://www.livingrewievs.org/lrr-2010-5

[24] Millward R.S. (2008), *A five-dimensional Schwarzschild-like solution*, arXiv: gr-qc/0603132

[25] Milson R. ,Coley A., Pravda V., Pravdová A. (2005), *Algebraically special tensors*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **2**, 41

[26] Maison D. (1979), *Ehlers-Harrison-type transformatioons for Jordan's extended theory of gravitation*, Gen. Rel. Grav. **10**, 717

[27] Misner C.W. (1968), *The isotropy of the univerce*, Astrophys. J. **151**, 431

[28] Myers R.C., Perry M.J. (1986) *Black holes in higher dimensional space-times*, Ann. Phys. **172**, 304

[29] Neugebauer G., Kramer D. (1969), *Eine Methode zur Konstruktion stationärer Einstein-Maxwell-Felder*, Ann. Phys. (Germany) **24**, 62

[30] Ortaggio M. (2009), *Bel-Debever criteria for the classification of the Weyl tensor in higher dimensions*, Class. Quantum Grav. **26**, 195015

[31] Podolsky J., Ortaggio M. (2006), *Robinson-Trautman spacetimes in higher dimensions*, Class. Quantun Grav. **23** 5785-5797

[32] Ponce de Leon (2007), *Exterior spacetime for stellar models in 5-dimensional Kaluza-Klein gravity*, Class. Quantum Grav. **24** 1755-1774

[33] Ponce de Leon (2008), *Kaluza-Klein solitons reexamined*, Int. J. Mod. Phys. **D17**, 237-256

[34] Ponce de Leon (2009), *The equivalence principle in Kaluza-Klein gravity*, Int. J. Mod. Phys. **D18**, 251-273

[35] Rasheed D. (1995), *The rotating dyonic black holes of Kaluza-Klein theory*, Nucl. Phys B **454**, 379

[36] De Smet P.-J. (2002), *Black holes on cylinders are not algebraically special*, Class. Quantum Grav. **19**, 4877-4896

[37] Sorkin R.D. (1983), *Kaluza-Klein Monopole*, Phys. Rev. Lett. **51**, 87

[38] Szereszewski A., Tafel J., Jakimowicz M. (2012) *D-dimensional metrics with D-3 symmetries*, Int. J. Theor. Phys. **51**, 1360-1369

[39] Tangherlini F.R. (1963), *Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem*, Nuovo Cim. **27**, 636-651