

Zliczanie ścieżek kratowych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

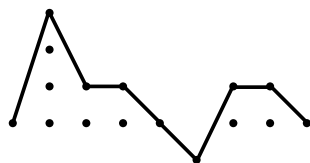
Maciej Dziemiańczuk

Ścieżka kratowa to skończony ciąg punktów p_0, p_1, \dots, p_n kraty $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *Segment ścieżki* to różnica dwóch kolejnych punktów ścieżki $p_i - p_{i-1}$. Z pojęciem segmentu związana jest równoważna reprezentacja ścieżki, która przedstawia ją za pomocą punktu początkowego p_0 oraz ciągu segmentów s_1, s_2, \dots, s_n , które determinują w sposób jednoznaczny kolejne jej punkty. *Długość ścieżki* to liczba jej segmentów. Dla przykładu, na rysunku 1 przedstawiona jest ścieżka

$$((0, 0), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 0), (5, -1), (6, 1), (7, 1), (8, 0)),$$

której reprezentacja segmentowa to punkt początkowy $(0, 0)$ oraz ciąg segmentów:

$$((1, 3), (1, -2), (1, 0), (1, -1), (1, -1), (1, 2), (1, 0), (1, -1)).$$



RYSUNEK 1: Ścieżka kratowa z punktu $(0, 0)$ do $(8, 0)$.

Literatura dotycząca ścieżek kratowych jest bardzo bogata. Humphreys w swojej pracy przeglądowej [13] wymienia ponad dwieście kluczowych artykułów. Rozważane są ścieżki, które definiuje się poprzez ustalenie: punktu początkowego i końcowego, zbioru segmentów, zbioru punktów kraty oraz długości. Mając ustaloną rodzinę ścieżek, najczęściej pyta się o liczbę takich ścieżek oraz związki z innymi strukturami.

Jedną z najbardziej znanych rodzin ścieżek kratowych są te, które składają się jedynie z dwóch typów segmentów: $(1, 1)$ oraz $(1, -1)$. W literaturze nazywane są *ścieżkami Dycka*. Po raz pierwszy zostały użyte przez Whitwortha [22] w 1878 roku do opisu pewnych problemów kombinatorycznych. W 1887 roku Bertrand sformułował w [3] słynny problem ballotowy (ang. *ballot problem*), który tłumaczony jest na pytanie o liczbę ścieżek Dycka z punktu $(0, 0)$ do $(u + d, u - d)$, gdzie $u > d$, które dodatkowo nie zawierają punktów kraty $(i, 0)$ dla $i \geq 1$. André [1] rozwiązując ten problem pokazał, że ich liczba jest równa $\binom{u+d-1}{u}(u-d)/d$. W szczególnym przypadku, liczba ścieżek Dycka z punktu $(0, 0)$ do $(2n, 0)$, które nie przechodzą przez punkty poniżej osi x jest równa liczbie Catalana $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$.

Naturalnym uogólnieniem ścieżek Dycka są *ścieżki Motzkina* [17], które składają się z trzech rodzajów segmentów: $(1, 1)$, $(1, 0)$ oraz $(1, -1)$. Znanych jest wiele bijekcji pomiędzy tymi ścieżkami a innymi strukturami kombinatorycznymi jak poprawne nawiasowania, drzewa czy grafy dwudzielne (patrz Donaghey i Shapiro [7]). Liczba ścieżek Motzkina z punktu $(0, 0)$ do $(n, 0)$, które nie schodzą poniżej osi x , nazywana jest *liczbą Motzkina* oraz wynosi $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$.

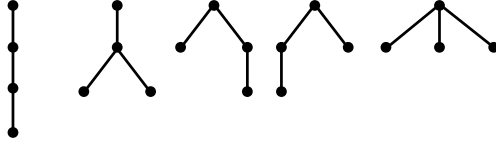
Kolejną rodziną ścieżek kratowych są *ścieżki Łukasiewicza* [10, Roz. I.5.3], nazwane tak od nazwiska polskiego logika Jana Łukasiewicza (1878-1956). Są to ścieżki złożone z segmentów postaci $(1, k)$, gdzie k jest liczbą całkowitą taką, że $k \geq -1$. Liczba ścieżek Łukasiewicza z punktu $(0, 0)$ do $(n, 0)$, które nie schodzą poniżej osi x , jest równa n -tej liczbie Catalana C_n (patrz Flajolet i Sedgewick [10]). Struktury te stosuje się w analizie algorytmów ze względu na związek z tak zwanymi drzewami porządkowymi (ang. *ordered trees* oraz *plane trees*), o których powiemy więcej w dalszej części.

W wielu zastosowaniach korzysta się z tak zwanych ważonych lub kolorowanych ścieżek kratowych, w których każdy segment ma dodatkowo przypisaną dodatnią liczbę kolorów, na jakie można ją pokolorować. Ważonymi ścieżkami Motzkina zajmowali się, między innymi, Deutsch i Shapiro [6], Chen i pozostali [4, 21]. Pokazali oni szereg bijekcji pomiędzy odpowiednio ważonymi ścieżkami Motzkina, ścieżkami Schrödera, podziałami zbiorów oraz pewnymi rodzinami drzew. Znanych jest również wiele bijekcji pomiędzy ważonymi ścieżkami Łukasiewicza a innymi strukturami kombinatorycznymi. Varvak [20] w swojej rozprawie pokazała, że istnieje wiele bijekcji pomiędzy specjalnie dobranymi ważonymi ścieżkami Łukasiewicza oraz: permutacjami, multipermutacjami, partycjami zbiorów, funkcjami idempotentnymi oraz drzewami. Głównym narzędziem jakie wykorzystwała jest związek ważonych ścieżek Łukasiewicza z nieskończonymi ułamkami łańcuchowymi. Hennessy [12] korzystając z teorii grup Riordana, funkcji tworzących oraz ułamków łańcuchowych pokazała kolejne bijekcje pomiędzy ważonymi ścieżkami Łukasiewicza oraz ścieżkami Schrödera i Motzkina.

Strukturą uogólniającą powyższe rodziny ścieżek kratowych są ścieżki złożone z dowolnych segmentów postaci $(1, k)$, dla $k \in \mathbb{Z}$. W literaturze pojawiają się pod nazwą *prostych ścieżek skierowanych* (ang. *simple directed lattice paths*). Korzysta się z nich jako modeli w analizie algorytmów i dynamicznych struktur danych, na przykład stosów (patrz np. Sedgewick i Flajolet [18]). Prostymi skierowanymi ścieżkami kratowymi w ogólnej postaci zajmowali się Banderier i Flajolet [2], którzy przy pomocy tak zwanej metody jądra (ang. *kernel method*) podali postać funkcji tworzących oraz asymptotyczne własności tych struktur.

W rozdziale 3 korzystamy ze ścieżek kratowych do badania kombinatorycznych i statystycznych własności multidrzew porządkowych. Zanim jednak powiemy o multidrzewach porządkowych, przypomnijmy co rozumiemy pod pojęciem drzewo porządkowe [5, 6, 14, 16]. Literatura podaje kilka definicji drzew porządkowych, ale najczęściej opisywane są jako nieetykietowane ukorzenione drzewa, w których dodatkowo ustala się porządek liniowy synów dla każdego wierzchołka wewnętrznego. Dla przykładu, wszystkie drzewa porządkowe na czterech wierzchołkach są przedstawione na rysunku 2.

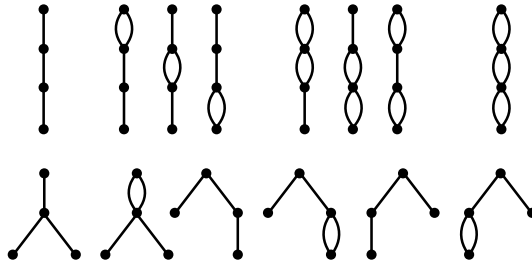
Powszechnie znana jest bijekcja pomiędzy rodziną drzew porządkowych na n wierzchołkach oraz zbiorem ścieżek Łukasiewicza z punktu $(0, 0)$ do $(n - 1, 0)$, które nie schodzą poniżej osi x



RYSUNEK 2: Wszystkie drzewa porządkowe na czterech wierzchołkach.

(patrz Flajolet i Sedgewick [10, Roz. I.5.1]). Z bijekcji tej wynika, że liczba drzew porządkowych na n wierzchołkach jest równa liczbie Catalana C_{n-1} . Wiadomo również (patrz Dershowitz i Zaks [5]), że liczba drzew porządkowych na n wierzchołkach, które mają k liści jest równa liczbie Narayana $\binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k-1} / (n-1)$. Natomiast oczekiwana liczba liści w drzewie porządkowym na n wierzchołkach wynosi $n/2$. Drzewa porządkowe są ściśle związane z kodami Łukasiewicza oraz polską notacją prefiksową, której używają takie języki programowania jak Logo, Tcl, Lisp (patrz np. Sedgewick i Flajolet [10, Roz. I.5.3]). Drzewa porządkowe służą jako struktury do rozkładu wyrażeń, z których korzystają kompilatory (patrz Knuth [15, Roz. 2.3]).

Drzewo porządkowe, w którym każda krawędź ma przypisaną dodatnią liczbą całkowitą, nazywaną *wagą*, będziemy nazywali *multidrzewem porządkowym*. Pierwsza wzmianka dotycząca takich drzew pochodzi od Bachera (patrz opis ciągu A002212 w bazie OEIS [19]). Pokazał on, że liczba multidrzew porządkowych, które mają n krawędzi równa jest $\sum_{k=0}^n C_k \binom{n-1}{k-1}$. Multidzewo porządkowe, w którym stopień wychodzący każdego wierzchołka (suma wag krawędzi łączących wierzchołek z jego synami) będzie nie większy niż N , będziemy nazywali *N -arnym multidrzewem porządkowym*. Dla przykładu, wszystkie 2-arne multidrzewa porządkowe na czterech wierzchołkach są przedstawione na rysunku 3, gdzie dla uproszczenia, wagi krawędzi są reprezentowane za pomocą krawędzi wielokrotnych.



RYSUNEK 3: Wszystkie 2-arne multidrzewa porządkowe na czterech wierzchołkach.

Podstawowe definicje

W rozprawie rozważamy ścieżki, których segmenty są postaci $V = (0, -1)$ oraz $S_k = (1, k)$, dla $k \in \mathbb{Z}$. Niech $N \geq 0$ oraz $\Sigma \subseteq \{V, S_N, S_{N-1}, \dots\}$, wtedy Σ -ścieżką będziemy nazywali skończony ciąg punktów kraty p_0, \dots, p_n takich, że $p_i - p_{i-1} \in \Sigma$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Ścieżki będziemy dzielili na trzy podstawowe rodzaje.

- Ścieżka *m -podstawowa* – ścieżka kratowa z punktu $(0, 0)$ do pewnego punktu $(n, -m)$, w której wszystkie punkty ścieżki oprócz skrajnych leżą na lub powyżej osi x . Dla $n \geq 0$

oraz $m \geq 0$, przez $\mathcal{P}_\Sigma(n, -m)$ będziemy oznaczali rodzinę wszystkich m -podstawowych Σ -ścieżek z punktu $(0, 0)$ do $(n, -m)$.

- Ścieżka *swobodna* – ścieżka kratowa z punktu $(0, 0)$ do pewnego punktu $(n, -m)$ bez dodatkowych ograniczeń. Dla $n \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, przez $\mathcal{F}_\Sigma(n, -m)$ będziemy oznaczali rodzinę wszystkich swobodnych Σ -ścieżek z punktu $(0, 0)$ do $(n, -m)$.
- Ścieżka *N -Raney* – ścieżka kratowa z punktu $(0, 1)$ do pewnego punktu $(n, 0)$, w której zbiorem dozwolonych segmentów jest zbiór $\{S_N, S_{N-1}, \dots\}$, oraz w której jedynym punktem poniżej prostej $y = 1$ jest punkt końcowy ścieżki. Dla $n \geq 0$, przez $\mathcal{R}_N(n)$ będziemy oznaczali rodzinę wszystkich ścieżek N -Raney z punktu $(0, 1)$ do $(n, 0)$.

Wyniki pierwszej części rozprawy

Pierwsza część rozprawy (Rozdział 2) poświęcona jest badaniu pewnych kombinatorycznych i statystycznych własności Λ -ścieżek, przy czym Λ jest dowolnym zbiorem segmentów spełniającym $\Lambda \subseteq \{V, S_N, S_{N-1}, \dots\}$ oraz $\{V, S_N\} \subseteq \Lambda$ dla ustalonego $N \geq 0$.

Rezultaty tego rozdziału pochodzą z pracy [9], a głównym jego wynikiem jest pokazanie (Twierdzenie 2.10), że dla wszystkich $m \geq 0$ oraz $n \geq 0$, istnieje bijekcja pomiędzy rodziną $\mathcal{P}_\Lambda(n, -m)$ oraz rodziną odpowiednio ważonych m -podstawowych Γ -ścieżek wiodących z punktu $(0, 0)$ do $(n, -m)$, gdzie $\Gamma = (\Lambda \setminus \{V\}) \cup \{S_N, S_{N-1}, \dots, S_{-1}\}$. Wynika z tego, że dodatkowe krawędzie wertykalne V w ścieżkach z $\mathcal{P}_\Lambda(n, -m)$ możemy, w pewnym sensie, zakodować za pomocą wag segmentów w ścieżkach pozbawionych V . Ścieżki z $\mathcal{P}_\Gamma(n, -m)$ mają prostszą, do zliczania, strukturę od ścieżek z $\mathcal{P}_\Lambda(n, -m)$, ponieważ te pierwsze są, w istocie, jednowymiarowe. Ponadto, Γ -ścieżki są przykładem wspomnianych wyżej prostych ścieżek skierowanych, dla których istnieje bogata literatura. Jedną z ważniejszych cech tych ścieżek jest to, że można je dekomponować w sposób pozwalający na otrzymanie równania dla odpowiednich funkcji tworzących. W rozdziale 2.6 skorzystamy z tej własności oraz wspomnianej bijekcji, aby otrzymać równanie dla funkcji tworzącej $P_{\Lambda, m}(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{P}_\Lambda(n, -m)| x^n$. Pokażemy (Twierdzenie 2.27),

$$P_{\Lambda, 0}(x) = 1 + \delta_{\Lambda, 0} x P_{\Lambda, 0}(x) + x P_{\Lambda, 0}(x) \sum_{k=1}^N \sum_{d=1}^k |\mathcal{H}_\Lambda(0, d, k)| \sum_{M=1}^d \prod_{j=1}^d P_{\Lambda, m_j}(x),$$

$$P_{\Lambda, m}(x) = \delta_{\Lambda, m} x + x \sum_{k=0}^N \sum_{d=1}^{k+1} |\mathcal{H}_\Lambda(m, d, k)| \sum_{M=1}^d \prod_{j=1}^d P_{\Lambda, m_j}(x),$$

gdzie $\delta_{\Lambda, m}$ oraz $|\mathcal{H}_\Lambda(m, d, k)|$ są pewnymi stałymi zależnymi od Λ (patrz rozdział 2.6).

W rozdziale 2.4 pokażemy pewne relacje pomiędzy 1-podstawowymi Λ -ścieżkami oraz swobodnymi Λ -ścieżkami. Udowodnimy (Twierdzenie 2.17), że dla $n \geq 1$,

$$|\mathcal{P}_\Lambda(n, -1)| = \frac{1}{n} (|\mathcal{F}_\Lambda(n, -1)| - |\mathcal{F}_\Lambda(n, 0)|).$$

Pokażemy (Twierdzenie 2.19 oraz 2.20), że dla $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \#Steps(V \in \mathcal{P}_\Lambda(n, -1)) &= |\mathcal{F}_\Lambda(n, 0)|, \\ \#Steps(S_k \in \mathcal{P}_\Lambda(n, -1)) &= |\mathcal{F}_\Lambda(n-1, -k-1)| \quad (S_k \in \Lambda), \\ \#Steps(\mathcal{P}_\Lambda(n, -1)) &= |\mathcal{F}_\Lambda(n, -1)|, \end{aligned}$$

gdzie $\#Steps(S \in \mathcal{P}_\Lambda(n, -1))$ oznacza liczbę wystąpień segmentu S w zbiorze ścieżek $\mathcal{P}_\Lambda(n, -1)$, natomiast $\#Steps(\mathcal{P}_\Lambda(n, -1))$ oznacza liczbę wszystkich segmentów w zbiorze ścieżek $\mathcal{P}_\Lambda(n, -1)$.

W rozdziale 2.5 pokażemy (Twierdzenie 2.22), że

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_\Lambda(n, m)| &= [x^{Nn-m}] \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \left(\sum_{S_k \in \Lambda} x^{N-k} \right)^n \quad (n \geq 1, m \in \mathbb{Z}), \\ |\mathcal{P}_\Lambda(n, -1)| &= \frac{1}{n} [x^{Nn+1}] \frac{1}{(1-x)^n} \left(\sum_{S_k \in \Lambda} x^{N-k} \right)^n \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

W dalszej części rozdziału opisane zostaną pewne statystyczne własności Λ -ścieżek. Pokażemy (Wniosek 2.23), że oczekiwana liczba segmentów w 1-podstawowej Λ -ścieżce ze zbioru $\mathcal{P}_\Lambda(n, -1)$ jest równa

$$n \frac{|\mathcal{F}_\Lambda(n, -1)|}{|\mathcal{F}_\Lambda(n, -1)| - |\mathcal{F}_\Lambda(n, 0)|} \quad (n \geq 1).$$

Przypomnijmy, że rozdziały 2.1 – 2.6 zawierają wyniki dotyczące ogólnego przypadku dla zbioru segmentów Λ . W rozdziałach 2.7 – 2.9 zastosujemy te wyniki do trzech szczególnych przypadków:

- $\Lambda_1 = \{V, S_N, S_{N-1}, \dots, S_{-1}\}$ oraz $\Gamma_1 = \{S_N, S_{N-1}, \dots, S_{-1}\}$ (ścieżki Łukasiewicza),
- $\Lambda_2 = \{V, S_N, S_{N-1}, \dots\}$ oraz $\Gamma_2 = \{S_N, S_{N-1}, \dots\}$ (ścieżki Raneya),
- $\Lambda_3 = \{V, S_N, S_{-K}\}$ (uogólnione ścieżki Dycka) oraz $\Gamma_3 = \{S_N, S_{N-1}, \dots, S_{-1}, S_{-K}\}$.

W szczególności pokażemy (Twierdzenie 2.30), że dla $m \in \{0, 1\}$, równanie dla funkcji tworzącej $P_{\Lambda_1, m}(x)$, która zlicza ścieżki z $\mathcal{P}_{\Lambda_1}(n, -m)$ względem n , upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} P_{\Lambda_1, 0}(x) &= 1 + x P_{\Lambda_1, 0}(x) \sum_{k=0}^N (1 + P_{\Lambda_1, 1}(x))^k, \\ P_{\Lambda_1, 1}(x) &= x \sum_{k=0}^{N+1} (1 + P_{\Lambda_1, 1}(x))^k. \end{aligned}$$

Pokażemy również (Twierdzenie 2.34), że dla $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_{\Lambda_1}(n, 0)| &= (-1)^n + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{Nj+1}{N+2} \rfloor} \frac{(-1)^{k+n-j}}{j} \binom{j}{k} \binom{(N+2)(j-k)}{2j-1}, \\ |\mathcal{P}_{\Lambda_1}(n, -1)| &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{Nn+1}{N+2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{(N+2)(n-k)}{2n-1}. \end{aligned}$$

W rozdziale 2.8 pokażemy z kolei (Twierdzenie 2.37), że

$$|\mathcal{P}_{\Lambda_2}(n, -1)| = \frac{1}{n} \binom{(N+2)n}{2n-1} \quad (n \geq 1).$$

Udowodnimy, że oczekiwana liczba segmentów wertykalnych V w ścieżce ze zbioru $\mathcal{P}_{\Lambda_2}(n, -1)$ jest równa $(Nn+1)/2$ oraz, że oczekiwana liczba wszystkich segmentów w ścieżce ze zbioru $\mathcal{P}_{\Lambda_2}(n, -1)$ jest równa $((N+2)n+1)/2$. W rozdziale 2.9 pokażemy (Twierdzenie 2.40), że

$$|\mathcal{P}_{\Lambda_3}(n, -1)| = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{Nn+1}{N+K} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n(N+1) - k(N+K)}{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Wyniki drugiej części rozprawy

Druga część rozprawy (Rozdział 3) poświęcona jest badaniu pewnych własności multidrzew porządkowych. Rezultaty z tej części pochodzą z pracy [8].

W rozdziale 3.2 pokażemy (Twierdzenie 3.8), że dla wszystkich $N \geq 0$ oraz $n \geq 0$, istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem $\mathcal{R}_N(n)$ ścieżek N -Raneya długości n oraz rodziną $\mathcal{T}_{N+1}(n)$ wszystkich $(N+1)$ -arnych multidrzew porządkowych na n wierzchołkach. W rozdziale 3.3 pokażemy (Lemat 3.23), że istnieje bijekcja pomiędzy $\mathcal{R}_N(n)$ oraz tak zwanymi ciągami $(N-1, n, 1)$ -Raneya (patrz np. Graham i inni [11]). Dzięki tym bijekcjom udowodnimy (Twierdzenie 3.24), że

$$|\mathcal{T}_N(n)| = \frac{1}{n} \binom{Nn}{n-1} \quad (N \geq 1, n \geq 1).$$

W rozdziałach 3.4 – 3.7 skorzystamy z powyższych dwóch bijekcji do wyprowadzenia kolejnych rezultatów dotyczących multidrzew porządkowych. Zdefiniujemy następujące funkcje:

1. $L_N(n, k)$ = liczba drzew z $\mathcal{T}_N(n)$, które mają k liści,
2. $E_N(n, k)$ = liczba drzew z $\mathcal{T}_N(n)$, które mają k krawędzi,
3. $G_N(n, d)$ = liczba drzew z $\mathcal{T}_N(n)$, których korzeń ma stopień d ,
4. $M_N(n, d)$ = liczba wierzchołków stopnia d we wszystkich drzewach z $\mathcal{T}_N(n)$.

Pokażemy, że

$$L_N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \sum_{s=0}^{n-k} (-1)^s \binom{n-k}{s} \binom{N(n-k-s)}{n-1}, \quad (\text{Tw. 3.26})$$

$$E_N(n, k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n}{i} \binom{i}{j} \binom{k-i}{n-i-1} \binom{k-jN-1}{i-1}, \quad (\text{Tw. 3.28})$$

$$G_N(n, d) = \frac{N-1+d}{(N-1)(n-1)+d} \binom{N(n-1)+d-2}{n-2}, \quad (\text{Tw. 3.30})$$

$$M_N(n, d) = \binom{N(n-1)+d-1+0^d}{n-2+0^d}, \quad (\text{Tw. 3.31})$$

gdzie $0^d = 0$ dla $d > 0$ oraz $0^0 = 1$.

W rozdziale 3.7 wyprowadzimy pewne statystyczne własności multidrzew porządkowych, a głównym wynikiem jest (Twierdzenie 3.34), że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_N(n, 0)}{nT_N(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M_N(n, 0)}{nT_N(n)} = \frac{1}{e}.$$

Literatura

- [1] D. André. Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 105:436–437, 1887. Paris.
- [2] C. Banderier and P. Flajolet. Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoretical Computer Science*, 281:37–80, 2002.
- [3] J. Bertrand. Solution d'un probleme. *Comptes Rendus de l'Académie des Science Paris 105*, page 369, 1887.
- [4] W. Y. C. Chen, N. Y. Li, Louis W. Shapiro, and S. H. F. Yan. Matrix identities on weighted partial Motzkin paths. *European Journal of Combinatorics*, 28:1196–1207, 2007.
- [5] N. Dershowitz and S. Zaks. Enumerations of ordered trees. *Discrete Mathematics*, 31(1):9–28, 1980.
- [6] E. Deutsch and L. W. Shapiro. A bijection between ordered trees and 2-Motzkin paths and its many consequences. *Discrete Mathematics*, 256:655–670, 2002.
- [7] R. Donaghey and L. W. Shapiro. Motzkin numbers. *Journal of Combinatorial Theory Series A*, 23:291–301, 1977.
- [8] M. Dziemiańczuk. Enumerations of plane trees with multiple edges and raney lattice paths. *Discrete Mathematics*, 337:9–24, 28 Dec. 2014.
- [9] M. Dziemiańczuk. On directed lattice paths with additional vertical steps. Submitted for publication, arXiv:1410.5747, 2014.
- [10] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [11] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, second edition, 1994.
- [12] A. Hennessy. *A Study of Riordan Arrays with Applications to Continued Fractions, Orthogonal Polynomials and Lattice Paths*. PhD thesis, Waterford Institute of Technology, 2011.
- [13] K. Humphreys. A history and a survey of lattice path enumeration. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140(8):2237–2254, 2010.

- [14] D. A. Klarner. Correspondences between plane trees and binary sequences. *Journal of Combinatorial Theory*, 9:401–411, 1970.
- [15] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume vol. 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley, third edition, 1997.
- [16] W. Młotkowski and K. A. Penson. The probability measure corresponding to 2-plane trees. *Probability and Mathematical Statistics*, 33:255–264, 2013.
- [17] T. Motzkin. Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(4):352–360, 1948.
- [18] R. Sedgewick and P. Flajolet. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- [19] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. Published electronically at <http://oeis.org>.
- [20] A. L. Varvak. *Encoding Properties of Lattice Paths*. PhD thesis, Brandeis University, 2004.
- [21] C. J. Wang W. Y.C. Chen. Noncrossing linked partitions and large (3,2)-Motzkin paths. *Discrete Mathematics*, 312(11):1918–1922, 2012.
- [22] W. A. Whitworth. Arrangements of m things of one sort and n things of another sort, under certain conditions of priority. *Messenger of Math.*, 8:105–114, 1879.