Złożoność topologiczna zbiorów definiowanych przez automaty i formuły

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Szczepan Hummel
Uniwersytet Warszawski

10 Maja 2017

W niniejszej rozprawie rozważane są języki nieskończonych słów lub drzew definiowane poprzez automaty różnych typów lub formuły różnych logik. Pytamy o najwyższą możliwą pozycję w hierarchii borelowskiej lub rzutowej zajmowaną przez zbiory definiowane w danym formalizmie.

Wprowadzenie

Teoria definiowalności, jak określa to J.W. Addison [Add04], „bada złożoność pojęć poprzez patrzenie na gramatyczną złożoność ich definicji”[1]. Mierzenie takiej właśnie złożoności jest głównym tematem niniejszej rozprawy. Jako „pojęcia” rozważamy własności nieskończonych słów lub nieskończonych drzew etykietowanych, natomiast jako „gramatyk” używamy modeli automatów, logik lub konstrukcji pochodzących z deskryptywnej teorii mnogości.

O ile nieskończone obiekty występują naturalnie w matematyce, o tyle może wymagać wyjaśnienia dlaczego warto je rozważać w informatyce. Nieskończone słowa są używane na przykład w weryfikacji formalnej do modelowania systemów działających w potencjalnie nieskończonym czasie, takich jak system operacyjny lub serwer przyjmujący zgłoszenia od aplikacji klienckich (patrz np. [JGP99]). W takim kontekście system może być modelowany jako automat, a specyfikacja systemu może być wyrażona w odpowiedniej logice. Nieskończone drzewa pojawiają się na przykład gdy potrzebujemy badać wszystkie możliwe przebiegi niedeterministycznego systemu (patrz koncepcja czasu rozgałęzionego [Eme90]).

[1] Tłumaczenie własne.

Dzięki temu, że rozpatrujemy struktury nieskończone, mamy możliwość korzystania z bogactwa miar złożoności dostarczanego przez deskryptywną teorię mnogości. Zbiór wszystkich słów lub wszystkich drzew nad skończonym alfabetem jest, z topologicznego punktu widzenia, równoważny przestrzeni Cantora—jednej z dwóch podstawowych przestrzeni rozważanych w deskryptywnej teorii mnogości (obok przestrzeni Baire'a). Miary dostarczane przez tę dyscyplinę to między innymi: hierarchia borelowska, hierarchia rzutowa oraz hierarchia Wadge'a. Jako hierarchię rozumiemy tutaj rosnący (w sensie inkluzji) ciąg klas zbiorów. Mierzenie złożoności jest realizowane przez hierarchie w następujący sposób: im wyżej zbiór znajduje się w hierarchii, tym większa jest jego złożoność.

Hierarchie mogą być również użyte do mierzenia złożoności formalizmów. Pytamy, jak klasa wszystkich zbiorów definiowalnych w danym formalizmie, np. przez automaty pewnego typu, zanurza się w hierarchii borelowskiej lub rzutowej (patrz Rysunek 1). Taka analiza złożoności najczęściej sprowadza się do odpowiedzi na jedno z dwóch pytań:

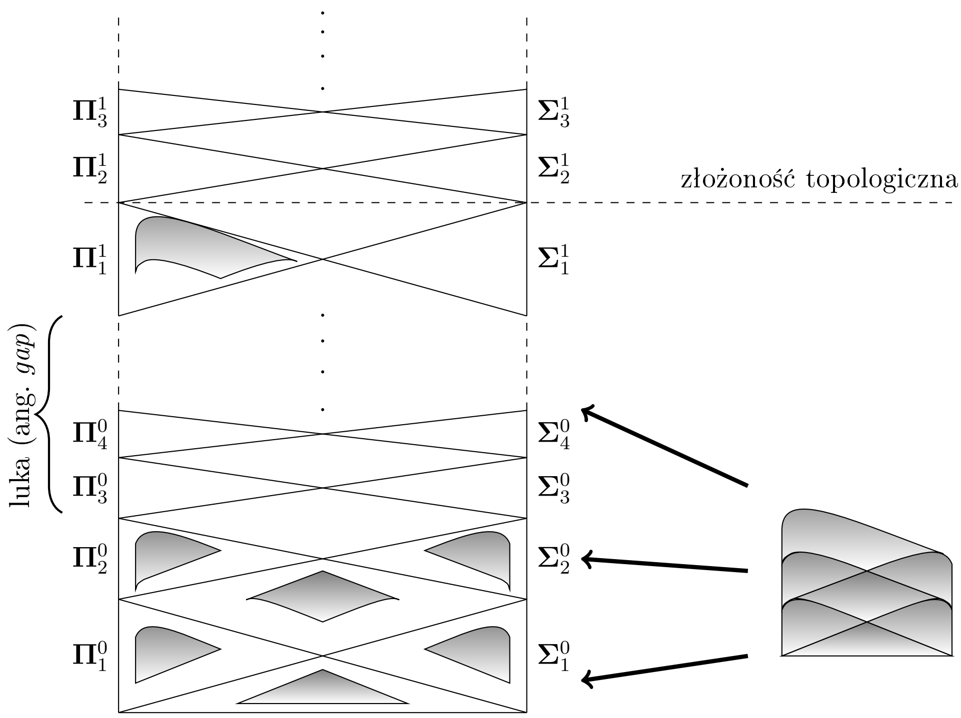
Pytanie 1 (złożoność topologiczna) *Do jakiego poziomu hierarchii borelowskiej i rzutowej sięgają zbiory definowalne w danym formalizmie?*

Lub bardziej szczegółowe:

Pytanie 2 *Na których poziomach hierarchii borelowskiej i rzutowej występują zbiory definiowalne w danym formalizmie?*

Pierwszymi badaczami zajmującymi się odpowiedzią na powyższe pytania w kontekście teorii języków formalnych byli Büchi i Landweber [BL69]. Pokazali oni, że wszystkie zbiory ω-słów definiowalne w logice monadycznej drugiego rzędu (MSO) są boolowskimi kombinacjami zbiorów z borelowskiej klasy $\mathbf{\Pi}^0_2$ (inaczej G_δ). Klasa MSO-definiowalnych zbiorów ω-słów, nazywanych **językami ω-regularnymi**, zyskała zainteresowanie kilka lat wcześniej, gdy Büchi [Büc62] wprowadził model automatów skończonych, nazwanych później automatami Büchiego, które rozpoznają dokładnie języki z tej klasy. Dla tego modelu, jak dla wielu innych modeli automatów, istnieje naturalny algorytm rozstrzygający niepustość języka rozpoznawanego przez automat, który był użyty w dowodzie rozstrzygalności logiki MSO na ω-słowach. Podobna metoda—poprzez wprowadzenie odpowiedniego modelu automatów—była użyta przez Rabina [Rab69] w dowodzie rozstrzygalności logiki MSO na nieskończonych drzewach binarnych. Zbiory drzew definiowane w logice MSO nazywane są **regularnymi językami drzew**.

W literaturze, rozważanych jest wiele modeli automatów równoważnych automatom Rabina. W niniejszej pracy koncentrujemy się na jednym z nich:



Rysunek 1: Zanurzenie klasy zbiorów definiowalnych w danym formalizmie w hierarchii borelowskiej i rzutowej.

automatach parzystości na drzewach. Rozważamy również automaty parzystości na słowach. Wybór ten podyktowany jest faktem, że definicja tego modelu automatów pozwala zdefiniować hierarchię zwaną **hierarchią indeksów Rabina-Mostowskiego**—jeszcze jedną deskryptywną miarę złożoności.

Klasa języków ω-regularnych jest dobrze zbadana: jak już wspomnieliśmy, topologicznie sięga klasy boolowskich kombinacji zbiorów $\mathbf{\Pi}^0_2$, ale nie wyżej [BL69]; hierarchia indeksów Rabina-Mostowskiego wysyca się na poziomie $(1, 2)$, czyli każdy język ω-regularny jest rozpoznawany przez automat Büchiego [Büc62]; w przypadku automatów deterministycznych hierarchia indeksów Rabina-Mostowskiego jest ścisła, a dla danego języka jego pozycja w hierarchii może być efektywnie obliczona [NW98].

Podatność algorytmiczna i wygodne własności strukturalne klasy języków ω-regularnych zachęciły Bojańczyka i Colcombeta [Boj04, BC06, Boj11, Boj10] do poszukiwania rozszerzeń tej klasy zachowujących część z jej dobrych własności. Jedno z podejść [Boj04] polegało na dodaniu do logiki MSO kwantyfikatora „unbounding”, który pozwala na wyrażenie własności typu „długość bloków kolejnych liter a jest w danym słowie nieograniczona”. Rozszerzona w ten sposób logika została nazwana MSO+U. Formalnie kwantyfikator jest zdefiniowany w taki sposób, że formuła $\mathsf{U}_X\varphi(X)$ oznacza:

“$\varphi(X)$ *jest spełniona przez skończone zbiory* X *dowolnie dużej liczności*”

Rozważano również podobne ilościowe rozszerzenie automatów Büchiego [BC06]. Automaty z warunkiem ograniczającym (ang. *bounding*), nazywane ωB-automatami, potrafią rozpoznawać takie języki jak:

$$L_B = \{a^{n_0}ba^{n_1}ba^{n_2}b\ldots \mid \limsup n_i < \infty\}\,,$$

podczas gdy automaty z warunkiem urozbieżniającym (ang. *strongly unbounding*), nazywane ωS-automatami, potrafią rozpoznawać takie języki jak:

$$L_S = \{a^{n_0}ba^{n_1}ba^{n_2}b\ldots \mid \liminf n_i = \infty\}\,.$$

Automaty posiadające możliwości obu powyższych modeli są nazywane ωBS-automatami. W niniejszej rozprawie obliczona została dokładna złożoność topologiczna ωB-automatów, ωS-automatów, ωBS-automatów oraz logiki MSO+U, o czym piszemy dokładniej w kolejnej sekcji.

Z drugiej strony, klasa regularnych języków drzew nieskończonych skrywa ciągle wiele tajemnic. Jej złożoność topologiczna jest nieborelowska—konkretnie, regularne języki drzew sięgają klasy $\mathbf{\Delta}^1_2$ w hierarchii rzutowej. Rozstrzygalność niedeterministycznego indeksu Rabina-Mostowskiego została udowodniona jedynie w przypadku kiedy jako wejście rozważamy język rozpoznawany przez automat deterministyczny, zwany językiem deterministycznym [NW05], lub język rozpoznawany przez tzw. automat growy [FMS16].

Również postać zanurzenia w hierarchii borelowskiej i rzutowej (patrz Pytanie 2) jest lepiej zbadana dla języków deterministycznych niż dla wszystkich języków regularnych. Niwiński i Walukiewicz [NW03] pokazali, że deterministyczny język jest albo $\mathbf{\Pi}^1_1$-zupełny, albo jest najwyżej na poziomie $\mathbf{\Pi}^0_3$ hierarchii borelowskiej. Jest oczywiste, z powodów licznościowych, że tego typu „luka" (ang. *gap*) musi istnieć również dla całej klasy języków regularnych, ale nie wiadomo jakie poziomy hierarchii borelowskiej ta luka obejmuje. Skurczyński [Sku93], Duparc i Murlak [DM07] udzielili odpowiedzi na Pytanie 2 dla jeszcze jednej podklasy języków regularnych. Mianowicie pokazali oni, że języki rozpoznawane przez słabe automaty pojawiają się dokładnie na wszystkich skończonych poziomach hierarchii borelowskiej.

Złożoność klasy regularnych języków drzew skłania do poszukiwania podklas, które byłyby bardziej uchwytne. Ponieważ najlepiej dotąd zbadana podklasa odpowiada automatom deterministycznym, w niniejszej rozprawie rozważamy naturalne rozszerzenie tego modelu—**automaty jednoznaczne**. Ważną cechą automatu deterministycznego jest to, że dla każdej struktury wejściowej ma dokładnie jeden bieg. Automat jednoznaczny w pewnym sensie zachowuje tę cechę poprzez to, że ma najwyżej jeden bieg akceptujący na każdej strukturze, podczas gdy syntaktycznie jest niedeterministyczny. Wiadomo, że klasa języków rozpoznawanych przez automaty jednoznaczne jest ścisłym rozszerzeniem klasy języków deterministycznych i ścisłą podklasą klasy języków regularnych [NW96, CL07, CLNW10].

Klasa jednoznacznych języków drzew nie jest jeszcze dobrze zbadana. Nie wiadomo na przykład czy następujące pytanie jest rozstrzygalne: Dla danego regularnego języka drzew nieskończonych L, czy L jest rozpoznawany przez pewien automat jednoznaczny? Przed wynikami otrzymanymi przez autora tej rozprawy nie było nawet wiadomo, czy złożoność topologiczna tej klasy jest większa niż złożoność języków deterministycznych, które, jak już wspomnieliśmy, wszystkie są koanalityczne ($\mathbf{\Pi}^1_1$). Okazało się, że złożoność jest większa [Hum12]. Niniejsza rozprawa prezentuje wyniki, które podnoszą dolne ograniczenie złożoności topologicznej języków jednoznacznych, ale nie daje żadnego ograniczenia górnego. W szczególności nadal nie wiadomo, czy dla każdego języka regularnego istnieje język jednoznaczny, który jest topologicznie trudniejszy.

Wyniki dotyczące języków ω-słów

Języki rozpoznawane przez ωBS-automaty (odpowiednio ωB-automaty, ωS-automaty) są nazywane **ωBS-regularnymi** (odpowiednio ωB-regularnymi, ωS-regularnymi).

Twierdzenie 3 *Złożonością topologiczną klasy języków ωB-regularnych jest klasa* $\mathbf{\Sigma}^0_3$. *Złożonością topologiczną klasy języków ωS-regularnych jest klasa* $\mathbf{\Pi}^0_3$.

Formalnie, pierwsze z powyższych stwierdzeń oznacza:

1. każdy język ωB-regularny jest w klasie $\mathbf{\Sigma}^0_3$ (**górne ograniczenie złożoności topologicznej**) oraz
2. każdy zbiór z klasy $\mathbf{\Sigma}^0_3$ jest redukowalny w sposób ciągły to pewnego języka ωB-regularnego (**dolne ograniczenie złożoności topologicznej**).

Drugie zdanie Twierdzenia 3 interpretuje się analogicznie.

Twierdzenie 4 *Złożonością topologiczną klasy języków ωBS-regularnych jest klasa* $\mathbf{\Sigma}^0_4$.

Następnie rozważamy alternujący wariant ωBS-automatów, dla którego dowodzimy:

Twierdzenie 5 *Dla każdego $n < \omega$ istnieje alternujący ωBS-automat rozpoznający język* $\mathbf{\Pi}^0_{2n}$*-trudny.*

Poniższy wniosek daje negatywną odpowiedź na pytanie postawione przez Bojańczyka i Colcombeta [BC06, Rozdział 6], czy niedeterministyczne ωBS-automaty są równoważne alternującym.

Wniosek 6 *Alternujące ωBS-automaty mają większą moc wyrazu niż boolowskie kombinacje niedeterministycznych ωBS-automatów.*

Pokazujemy, że języki L_n trudne dla odpowiednich skończonych poziomów hierarchii borelowskiej użyte w dowodzie Twierdzenia 5 są również definiowalne w logice MSO+U. Wyniki zaprezentowane dla tej logiki sięgają jednak znacznie dalej.

Twierdzenie 7 *Dla każdego $i > 0$ istnieje taka formuła φ_i logiki* MSO+U, *że język $L(\varphi_i)$ jest* $\mathbf{\Sigma}^1_i$*-trudny.*

Ponieważ nietrudno zauważyć, że każdy język ω-słów lub nieskończonych drzew definiowalny w MSO+U należy do hierarchii rzutowej, otrzymujemy:

Twierdzenie 8 *Złożonością topologiczną logiki* MSO+U *na ω-słowach lub nieskończonych drzewach jest klasa* ***wszystkich*** *zbiorów rzutowych.*

Wniosek 9 *Nie istnieje deterministyczny, niedeterministyczny, alternujący, ani zagnieżdżony model automatów o warunku akceptacji znajdującym się na żadnym ustalonym poziomie hierarchii rzutowej, którego moc wyrazu obejmuje całą logikę* MSO+U *na ω-słowach.*

Wszystkie wspomniane wyniki dotyczące złożoności ωB-automatów, ωS-automatów, ωBS-automatów oraz logiki MSO+U zostały opublikowane [HMT10, HS12].

Wyniki dotyczące języków drzew nieskończonych

Język L jest **podwójnie jednoznaczny** jeżeli L jest jednoznaczny i $\overline{L}$ jest jednoznaczny.

Twierdzenie 10 *Istnieje podwójnie jednoznaczny język drzew nieskończonych, który jest $\mathbf{\Sigma}^1_1$-zupełny (analityczny-zupełny).*

Wniosek 11 *Języki jednoznaczne są topologicznie bardziej złożone niż deterministyczne.*

Język G użyty w dowodzie Twierdzenia 10 jest rozpoznawany przez niedeterministyczny automat Büchiego.

Wniosek 12 *Istnieje język o nieborelowskiej złożoności topologicznej, który jest z jednej strony jednoznaczny, a z drugiej strony rozpoznaway przez automat Büchiego.*

Powyższy wniosek może być uważany za interesujący w świetle wyniku Finkela i Simonneta [FS09, Corollary 4.14], którzy udowodnili, że każdy język drzew rozpoznawany przez jednoznaczny automat Büchiego jest borelowski.

Wszystkie powyższe wyniki dotyczące złożoności topologicznej jednoznacznych języków drzew zostały opublikowane [Hum12], wraz ze stwierdzeniem, że używając języka G można skonstruować język jednoznaczny, który jest topologicznie trudniejszy niż każda przeliczalna boolowska kombinacja zbiorów analitycznych.

Wyniki prezentowane poniżej nie zostały jeszcze opublikowane.

Wprowadzamy operację σ na językach drzew i dowodzimy następujące jej własności:

Twierdzenie 13 *Niech $L \subseteq T_A$. Jeżeli L jest trudny dla klasy złożoności topologicznej $\boldsymbol{K}$, wtedy $\sigma(L)$ jest trudny dla sigma-algebry*[2] $\sigma(\boldsymbol{K})$.

[2] Rozszerzenie pojęcia sigma-algebry generowanej przez $\mathbf{K}$, do $\mathbf{K}$ będącego klasą a nie zbiorem jest formalnie wyjaśnione w pracy.

Twierdzenie 14 *Jeżeli język $L \subseteq T_A$ jest podwójnie jednoznaczny, to język $\sigma(L)$ również jest podwójnie jednoznaczny.*

Definicja 15 ([AN07]) *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Język $L \subseteq X$ jest* ***rozciągalny*** *jeżeli dla każdego ciągu $\{a_n\}$ liczb naturalnych istnieje rozciągnięcie L względem $\{a_n\}$, tj. funkcja $s : X \to X$, która redukuje L do jego samego, taka, że dla każdego $k \geqslant 0$ i każdego $t_1, t_2 \in X$ spełniona jest implikacja:*

$$d(t_1, t_2) \leqslant 2^{-k} \implies d(s(t_1), s(t_2)) \leqslant 2^{-a_k} \tag{1}$$

Odnotujmy, że wiele języków drzew rozważanych jako przykłady w literaturze ma własność rozciągalności. Dotyczy to między innymi growych języków drzew $W_{(\iota,\kappa)}$ [AN07].

Lemat 16 *Niech A będzie skończonym niepustym alfabetem. Jeżeli język $L \subseteq T_A$ jest rozciągalny, to język $\sigma(L)$ również jest rozciągalny.*

Poniżej, symbolem $<_W$ oznaczamy ostry quasi-porządek Wadge'a, tj. $L <_W M$ oznacza, że zbiór L jest redukowalny w sposób ciągły do języka M, ale M nie jest redukowalny w sposób ciągły do L.

Twierdzenie 17 *Niech A będzie skończonym niepustym alfabetem. Jeżeli język $L \subseteq T_A$ jest rozciągalny, to dla każdego $n \geqslant 0$, $\sigma^n(L) <_W \sigma^{n+1}(L)$.*

Konstruujemy również operację σ^ω, która służy jako ω-ta iteracja aplikacji operacji σ.

Twierdzenie 18 *Niech A będzie skończonym niepustym alfabetem. Jeżeli język $L \subseteq T_A$ jest rozciągalny, to dla każdego $n \geqslant 0$, $\sigma^n(L) <_W \sigma^\omega(L)$.*

Twierdzenie 19 *Niech A będzie skończonym niepustym alfabetem. Jeżeli język $L \subseteq T_A$ jest rozciągalny, to język $\sigma^\omega(L)$ również jest rozciągalny.*

Twierdzenie 20 *Jeżeli język $L \subseteq T_A$ jest podwójnie jednoznaczny, to język $\sigma^\omega(L)$ również jest podwójnie jednoznaczny.*

Używając dwóch powyższych operacji możemy zdefiniować następujący ciąg języków:

$$
\begin{aligned}
&\emptyset <_W \sigma(\emptyset) <_W \sigma^2(\emptyset) <_W \sigma^3(\emptyset) <_W \dots \\
<_W\ & \sigma^\omega(\emptyset) <_W \sigma(\sigma^\omega(\emptyset)) <_W \sigma^2(\sigma^\omega(\emptyset)) <_W \sigma^3(\sigma^\omega(\emptyset)) <_W \dots \\
<_W\ & \sigma^\omega(\sigma^\omega(\emptyset)) <_W \sigma(\sigma^\omega(\sigma^\omega(\emptyset))) <_W \sigma^2(\sigma^\omega(\sigma^\omega(\emptyset))) <_W \dots \\
& \vdots \\
<_W\ & (\sigma^\omega)^k(\emptyset) <_W \sigma\left((\sigma^\omega)^k(\emptyset)\right) <_W \sigma^2\left((\sigma^\omega)^k(\emptyset)\right) <_W \dots \\
<_W\ & (\sigma^\omega)^{k+1}(\emptyset) <_W \dots \\
& \vdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Powyższy ciąg ma długość ω^2. Wszystkie języki w tym ciągu są podwójnie jednoznaczne, rozpoznawane przez jednoznaczne automaty parzystości indeksu $\{(0,1),(1,2)\}$. Oznacza to, że każda silnie spójna składowa stanów w danym automacie używa jedynie dwóch priorytetów. Z drugiej strony, żaden z języków w ciągu, poza pierwszymi dwoma, nie jest rozpoznawany przez alternujący automat używający 2 priorytetów.

Jako dodatkową ilustrację topologicznej złożoności języków z powyższego ciągu wspomnijmy, że już język $\sigma(\emptyset)$ jest $\mathbf{\Pi}^1_1$-zupełny.

Zauważmy, że rosnący ciąg języków podwójnie jednoznacznych podobny do powyższego możemy skonstruować zaczynając od dowolnego rozciągalnego języka podwójnie jednoznacznego.

Zastosowania wyników

Złożoność topologiczna logiki MSO+U była użyta przez Bojańczyka, Gogacza, Michalewskiego i Skrzypczaka [BGMS14] do udowodnienia, że logika ta jest „prawie nierostrzygalna". Formalnie, pokazali oni, że nie istnieje algorytm, który rozstrzyga teorię MSO+U pełnego drzewa binarnego i który ma dowód poprawności w ZFC. Metoda użyta w tym dowodzie stała się modelowym przykładem wykorzystania związku pomiędzy złożonością topologiczną a rozstrzygalnością. Rok później Bojańczyk, Parys i Toruńczyk [BPT16] przedstawili dowód nierozstrzygalności nieużywający topologii. Niemniej jednak wynik topologiczny posłużył jako drogowskaz w poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o rozstrzygalność, które pozostawało bez odpowiedzi przez dekadę.

Podczas pracy nad topologiczną złożonością języków jednoznacznych autor zwrócił się do Duparca z pytaniem jak operacje wprowadzone przez Wadge'a i Duparca, a później przeniesione na drzewa przez Murlaka [Wad72, Wad84, Dup01, Mur06, DM07], wpasowują się w kontekst jednoznaczności. Współpraca zaowocowała publikacją [DFH15], której współautorem był również Fournier, o hierarchii Wadge'a dla języków jednoznacznych. Wynik ten używa języka G wspomnianego wyżej. Wynik ten nie jest zawarty w rozprawie.

Współudział innych badaczy

Dolne ograniczenia złożoności topologicznej sformułowanej w Twierdzeniach 3 i 4 były udowodnione przy użyciu języków podanych wcześniej przez autorów modeli ωB-automatów i ωS-automatów, Mikołaja Bojańczyka i Thomasa Colcombeta [BC06]. Górne ograniczenie złożoności topologicznej ωBS-automatów sformułowanej w Twierdzeniu 4 było udowodnione przez Szymona Toruńczyka przy użyciu dowodu Twierdzenia 3 autora rozprawy.

Ciąg MSO+U-definiowalnych języków L_n trudnych dla odpowiednich skończonych poziomów hierarchii borelowskiej został podany przez Michała Skrzypczaka. Autor niniejszej rozprawy udowodnił, że języki te są rozpoznawane przez alternujący wariant ωBS-automatów (Twierdzenie 5).

Wyniki dotyczące rzutowej złożoności topologicznej MSO+U zostały osiągnięte wspólnie ze Skrzypczakiem (Twierdzenie 7). Sformułowanie jednej z części dowodu było ulepszone we współpracy z Toruńczykiem.

Na wczesnym etapie konstrukcji operacji σ autor uzyskał wsparcie od Skrzypczaka, które uczyniło operację prostszą, przejrzystszą i bardziej ogólną.

Pojęcie rozciągalności (Definicja 15) i sposób w jaki może ona być użyta do udowodnienia, że zbiór nie jest redukowalny w sposób ciągły do siebie samego zostały zapożyczone od André Arnolda i Damiana Niwińskiego [AN07].

Literatura

[Add04] J.W. Addison. Tarski's theory of definability: common themes in descriptive set theory, recursive function theory, classical pure logic, and finite-universe logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 126(1–3):77–92, 2004. Provinces of logic determined. Essays in the memory of Alfred Tarski. Parts I, {II} and {III}.

[AN07] André Arnold and Damian Niwiński. Continuous separation of game languages. *Fundamenta Informaticae*, 81(1-3):19–28, 2007.

[BC06] Mikołaj Bojańczyk and Thomas Colcombet. Bounds in ω-regularity. In *LICS*, pages 285–296, 2006.

[BGMS14] Mikołaj Bojańczyk, Tomasz Gogacz, Henryk Michalewski, and Michał Skrzypczak. On the decidability of MSO+U on infinite trees. In *Automata, Languages, and Programming - 41st International Colloquium, ICALP 2014, Proceedings, Part II*, pages 50–61, Copenhagen, Denmark, 2014.

[BL69] J. Richard Büchi and Lawrence H. Landweber. Definability in the monadic second-order theory of successor. *J. Symb. Log.*, 34(2):166–170, 1969.

[Boj04] Mikołaj Bojańczyk. A bounding quantifier. In *Computer Science Logic*, volume 3210 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 41–55, 2004.

[Boj10] Mikołaj Bojańczyk. Beyond ω-regular languages. In *STACS*, pages 11–16, 2010.

[Boj11] Mikołaj Bojańczyk. Weak MSO with the unbounding quantifier. *Theory Comput. Syst.*, 48(3):554–576, 2011.

[BPT16] Mikołaj Bojańczyk, Pawel Parys, and Szymon Toruńczyk. The MSO+U theory of $(\mathbb{N}, <)$ is undecidable. In *33rd Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2016*, pages 21:1–21:8, Orléans, France, 2016.

[Büc62] J. Richard Büchi. On a decision method in restricted second-order arithmetic. In *Proc. 1960 Int. Congr. for Logic, Methodology and Philosophy of Science*, pages 1–11, 1962.

[CL07] Arnaud Carayol and Christof Löding. MSO on the infinite binary tree: Choice and order. In *CSL*, pages 161–176, 2007.

[CLNW10] Arnaud Carayol, Christof Löding, Damian Niwiński, and Igor Walukiewicz. Choice functions and well-orderings over the infinite binary tree. *Central European Journal of Mathematics*, 8:662–682, 2010.

[DFH15] Jacques Duparc, Kevin Fournier, and Szczepan Hummel. On unambiguous regular tree languages of index (0, 2). In *24th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic, CSL 2015*, pages 534–548, Berlin, Germany, 2015.

[DM07] Jacques Duparc and Filip Murlak. On the topological complexity of weakly recognizable tree languages. In *Fundamentals of Computation Theory, 16th International Symposium, FCT 2007, Proceedings*, pages 261–273, Budapest, Hungary, 2007.

[Dup01] Jacques Duparc. Wadge hierarchy and Veblen hierarchy part I: Borel sets of finite rank. *J. Symb. Log.*, 66(1):56–86, 2001.

[Eme90] E. Allen Emerson. Temporal and modal logic. In *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Sematics (B)*, pages 995–1072. 1990.

[FMS16] Alessandro Facchini, Filip Murlak, and Michał Skrzypczak. Index problems for game automata. *ACM Trans. Comput. Log.*, 17(4):24:1–24:38, 2016.

[FS09] Olivier Finkel and Pierre Simonnet. On recognizable tree languages beyond the Borel hierarchy. *Fundamenta Informaticae*, 95(2-3):287–303, 2009.

[HMT10] Szczepan Hummel, Michał Skrzypczak, and Szymon Toruńczyk. On the topological complexity of MSO+U and related automata models. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2010, 35th International Symposium, MFCS 2010. Proceedings*, pages 429–440, Brno, Czech Republic, 2010.

[HS12] Szczepan Hummel and Michał Skrzypczak. The topological complexity of MSO+U and related automata models. *Fundamenta Informaticae*, 119(1):87–111, 2012.

[Hum12] Szczepan Hummel. Unambiguous tree languages are topologically harder than deterministic ones. In *GandALF*, pages 247–260, 2012.

[JGP99] Edmund M. Clarke Jr., Orna Grumberg, and Doron A. Peled. *Model Checking*. MIT Press, 1999.

[Mur06] Filip Murlak. The Wadge hierarchy of deterministic tree languages. In *Automata, Languages and Programming, 33rd International Colloquium, ICALP 2006, Proceedings, Part II*, pages 408–419, Venice, Italy, 2006.

[NW96] Damian Niwiński and Igor Walukiewicz. Ambiguity problem for automata on infinite trees. unpublished note, 1996.

[NW98] Damian Niwiński and Igor Walukiewicz. Relating hierarchies of word and tree automata. In *STACS 98, 15th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Proceedings*, pages 320–331, Paris, France, 1998.

[NW03] Damian Niwiński and Igor Walukiewicz. A gap property of deterministic tree languages. *Theor. Comput. Sci.*, 1(303):215–231, 2003.

[NW05] Damian Niwiński and Igor Walukiewicz. Deciding nondeterministic hierarchy of deterministic tree automata. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 123:195–208, 2005.

[Rab69] Michael O. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Transactions of the AMS*, 141:1–23, 1969.

[Sku93] Jerzy Skurczyński. The Borel hierarchy is infinite in the class of regular sets of trees. *Theoretical Computer Science*, 112(2):413–418, 1993.

[Wad72] William W. Wadge. Degrees of complexity of subsets of the Baire space. *Notices of the American Mathematical Society*, 19:714–715, 1972.

[Wad84] William W. Wadge. *Reducibility and determinateness on the Baire space.* PhD thesis, University of California, Berkeley, 1984.